一种新线搜索下 DY 共轭梯度法的全局收敛性*

Global Convergence of DY Conjugate Gradient Method under a New Line Search

陈翠玲[1],李 明[2],曾雯琪[1],李 略[1]
CHEN Cui-ling[1],LI Ming[2],ZENG Wen-qi[1],LI Lve[1]

(1. 广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004; 2. 桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)
(1. Department of Mathematics Science,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China;2. Department of Mathematics and Physics,Guilin University of Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:给出一种求解无约束优化问题的新线搜索,证明由新线搜索和 DY 公式产生的算法具有全局收敛性,再对此算法进行数值试验,并将其数值结果与 Wolfe 线搜索下 PRP 方法、DY 方法以及另外几种线搜索下 DY 共轭梯度法的数值结果进行比较来验证新算法是有效的.

关键词:无约束优化 共轭梯度法 Wolfe 线搜索 全局收敛性
中图法分类号: O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0034-05

Abstract: A new line search is proposed for solving the unconstrained optimization problem. The global convergence of the new conjugate gradient algorithm, which is generated by this line search and DY conjugate gradient formula, is obtained. Further, by testing the new algorithm and comparing its numerical results with those of PRP and DY methods under WWP line search, and with those of DY methods under other line searches, the results show that this new algorithm is effective.

Key words: unconstrained optimization, conjugate gradient method, Wolfe line search, global convergence

对于无约束优化问题

$$\min_{x\in\Re^n} f(x), \tag{0.1}$$

其中 $f:\Re^n\to\Re$ 连续可微. 在求解该问题的方法中,共轭梯度法是一类有效的方法,特别当 n 很大时,共轭梯度法因无需计算目标函数的 Hesse 矩阵而更加显示出它的优越性[1~4].

一般的共轭梯度法的迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k, \tag{0.2}$$

$$d_k=\begin{cases}-g_k, k=1,\\ -g_k+\beta_k d_{k-1}, k\geqslant 2,\end{cases} \tag{0.3}$$

其中 x_1 为初始点,d_k 为搜索方向,α_k 是由线搜索或由特定的公式计算出的步长因子,β_k 为标量,$g_k=\nabla f(x_k)$. 共轭梯度算法的关键是选取 α_k 和 β_k,常用选取 α_k 的线搜索是标准 Wolfe 线搜索,即选取 $\alpha_k>0$ 满足

$$f(x_k+\alpha_k d_k)\leqslant f(x_k)+\rho\alpha_k g_k^T d_k, \tag{0.4}$$

$$g(x_k+\alpha_k d_k)^T d_k\geqslant \sigma g_k^T d_k, \tag{0.5}$$

其中 $0<\rho<\sigma<1$;而 β_k 的选取公式常用的有

$$\beta_k^{FR}=\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2},\beta_k^{PRP}=\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2},\beta_k^{HS}=\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{(g_k-g_{k-1})^T d_{k-1}},\beta_k^{CD}=-\frac{\|g_k\|^2}{g_{k-1}^T d_{k-1}},\beta_k^{LS}=-\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{g_{k-1}^T d_{k-1}},\beta_k^{DY}=\frac{\|g_k\|^2}{(g_k-g_{k-1})^T d_{k-1}},$$

收稿日期:2010-07-09
作者简介:陈翠玲(1978-),女,讲师,主要从事最优化算法研究。
*国家自然科学基金项目(10961006),广西教育厅科研项目(200911LX53),广西师范大学青年骨干教师和青年教师基金项目(师政科技(2009)7)资助。

其中 $\|\cdot\|$ 为欧氏范数.

以上公式的全局收敛性已被广泛的研究过. 对于 DY 方法,Dai 和 Yuan[5] 严格证明采取 Wolfe 线搜索时每一步都产生一个下降方向,并且全局收敛. 张秀军[6] 给出新的线搜索

$$\begin{cases} f(x_k+\alpha_k d_k) \leqslant f(x_k)+\max\{\rho\alpha_k g_k^T d_k, \\ \quad \gamma\alpha_k^2 \|d_k\|^2\}, \\ g(x_k+\alpha_k d_k)^T d_k \geqslant \max\{\sigma g_k^T d_k, \\ \quad -2\sigma\alpha_k \|d_k\|^2\}, \end{cases}$$

其中 $0<\rho<\sigma<1, 0<\gamma<1$,并证明在此线搜索下 DY 方法是全局收敛的. 文献[7]则对文献[6]中的线搜索进行了推广,要求 α_k 满足

$$\begin{cases} f(x_k+\alpha_k d_k) \leqslant f(x_k)+\max\{\rho\alpha_k g_k^T d_k, \\ \quad \gamma\alpha_k{}^2 \|d_k\|^2\}, \\ |g(x_k+\alpha_k d_k)^T d_k| \leqslant \sigma |g_k^T d_k|, \end{cases}$$

并建立了在此线搜索下 DY 方法的全局收敛性. 王长钰等[1] 提出一种新的 Wolfe 型线搜索

$$\begin{cases} f(x_k+\alpha_k d_k)-f(x_k) \leqslant -\rho\alpha_k^2 \|d_k\|^2, \\ g(x_k+\alpha_k d_k)^T d_k \geqslant -2\sigma\alpha_k g_k^T d_k, \end{cases}$$

并用此线搜索证明一类三项共轭梯度方法的全局收敛性. 文献[8]利用其线搜索,得到了 DY 方法的全局收敛性. 由此可见,DY 方法有很好的收敛性. 然而,以上文献均没有对 DY 方法的数值表现进行讨论.

本文继续对 DY 方法进行研究,先提出一种新线搜索,接着建立 DY 方法在这种线搜索下的全局收敛性,最后对由此线搜索和 DY 公式产生的新算法进行数值试验,并将其数值结果与上述几种线搜索下的 DY 方法的数值结果进行比较. 结果表明,由本文中的新线搜索和 DY 方法产生的新算法有良好的数值表现.

1 新线搜索及新算法

结合文献[6~8]中的想法,提出如下新线搜索条件,即选取 $\alpha_k>0$ 满足

$$f(x_k+\alpha_k d_k) \leqslant f(x_k)-\rho\alpha_k{}^2\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}, \tag{1.1}$$

$$g(x_k+\alpha_k d_k)^T d_k \geqslant -2\sigma\alpha_k\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}, \tag{1.2}$$

其中 $0<\rho<\sigma<1$.

结合新线搜索和 DY 公式得到新算法步骤如下:

步骤 1　给定 $x_1\in\mathfrak{R}^n, \varepsilon>0$, $d_1=-g_1$, $k:=1$.

步骤 2　如果 $\|g_k\|<\varepsilon$,则停止;否则,由(1.1)式和(1.2)式求得 α_k.

步骤 3　令 $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$. 若 $g_{k+1}=0$,则算法停止,否则转步骤 4。

步骤 4　计算 β_k^{DY},由(0.3)式产生 d_{k+1}, $k:=k+1$,转步骤 2.

对新算法进行收敛性分析时,总假设目标函数满足条件:

(a) 函数 $f(x)$ 在水平集 $\mathcal{L}=\{x\in R^n \mid f(x)\leqslant f(x_1)\}$ 上有下界,其中 x_1 是初始点.

(b) 在水平集 $\mathcal{L}$ 的一个邻域 U 内,$f(x)$ 连续可微,其中梯度 $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件,即存在常数 $L>0$,使得

$$\|g(x)-g(y)\| \leqslant L\|x-y\|, \forall x,y\in U.$$

定理 1　设目标函数 $f(x)$ 满足假设(a),d_k 满足 $g_k^T d_k<0$,则存在 α_k 满足搜索条件(1.1)式和(1.2)式.

证明　$\forall\alpha>0$,令 $\varphi(\alpha)=f(x_k+\alpha d_k)+\rho\alpha^2\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}$,所以

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}=g_k^T d_k<0,$$

因此存在 $\alpha_{k'}>0$,使得当 $\alpha\in(0,\alpha_{k'}]$ 时,有 $\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}<0$. 由假设(a)知 $f(x)$ 有界,得

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}=+\infty.$$

令 $\hat{\alpha}_k=\inf\{\alpha>0 \mid \frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}=0\}$,则由介值定理可知 $\hat{\alpha}_k$ 必存在,且 $\hat{\alpha}_k>0$. 而对 $\forall\alpha\in(0,\hat{\alpha}_k]$,有 $\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}\leqslant 0$,再由微分中值定理有

$$\varphi'(\theta_k\hat{\alpha}_k)=g(x_k+\theta_k\hat{\alpha}_k d_k)^T d_k+2\rho\theta_k\hat{\alpha}_k\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}=0,$$

其中 $0<\theta_k<1$. 因此

$$g(x_k+\theta_k\hat{\alpha}_k d_k)^T d_k=-2\rho\theta_k\hat{\alpha}_k\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}\geqslant -2\sigma\theta_k\hat{\alpha}_k\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}.$$

于是存在 $\alpha_k=\theta_k\hat{\alpha}_k$ 满足(1.1)式和(1.2)式.

注　定理 1 说明满足(1.1)式和(1.2)式的步长 α_k 的存在性.

2 新算法的全局收敛性

定理 2　若目标函数 $f(x)$ 满足假设(a)和(b),$\{x_k\}$ 由(0.2)式产生,d_k 是搜索方向,α_k 满足搜索条件(1.1)式和(1.2)式,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\min\{\frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2}, \frac{(g_k^T d_k)^4}{\|d_k\|^4}\}<+\infty. \tag{2.1}$$

证明　由(1.2)式有

$$(g_{k+1}-g_k)^T d_k \geqslant -2\sigma\alpha_k\min\{(g_k^T d_k)^2, \|d_k\|^2\}$$

$$-g_k^T d_k \geqslant -2\sigma\alpha_k \| d_k \|^2 - g_k^T d_k. \tag{2.2}$$

另一方面，由 Lipschitz 条件，得

$$(g_{k+1} - g_k)^T d_k \leqslant L \alpha_k \| d_k \|^2. \tag{2.3}$$

由(2.1)式和(2.2)式，得 $-g_k^T d_k \leqslant (L+2\sigma)\alpha_k \cdot \| d_k \|^2$，所以

$$\alpha_k \geqslant \frac{1}{L+2\sigma} \cdot \frac{-g_k^T d_k}{\| d_k \|^2}, \alpha_k^2 \geqslant \frac{1}{(L+2\sigma)^2} \cdot \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^4}.$$

将该式代入(1.1)式，得

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k) \geqslant \rho \cdot \frac{1}{(L+2\sigma)^2} \cdot \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^4} \cdot \min\{(g_k^T d_k)^2, \| d_k \|^2\} = \frac{\rho}{(L+2\sigma)^2} \cdot \min\{\frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2}, \frac{(g_k^T d_k)^4}{\| d_k \|^4}\}. \tag{2.4}$$

对(2.4)式从 $k=1,2,\cdots$ 累加求和，则(2.1)式成立.

定理2的证明过程和作用都类似于Wolfe线搜索下的 Zoutendijk 条件[9]，因而我们称(2.1)式为推广的 Zoutendijk 条件.

定理3 若目标函数 $f(x)$ 满足假设(a)和(b)，$\{x_k\}$ 由(0.2)式产生，α_k 满足搜索条件(1.1)式和(1.2)式，$\beta_k = \beta^{DY}$，则 $\liminf\limits_{k\to\infty} \| g_k \| = 0$.

证明 用反证法. 若定理不成立，则存在 $\mu > 0$，使得

$$\| g_k \| \geqslant \mu, \forall\ k \geqslant 1. \tag{2.5}$$

由(0.3)式知，当 $k \geqslant 2$ 时，$d_k + g_k = \beta_k d_{k-1}$. 两边平方并整理，得

$$\| d_k \|^2 = \beta_k^2 \| d_{k-1} \|^2 - 2g_k^T d_k - \| g_k \|^2. \tag{2.6}$$

再对(0.3)式两端与 g_k 作内积，并利用 $\beta_k = \beta^{DY}$，可得

$$g_k^T d_k = \frac{\| g_k \|^2}{(g_k - g_{k-1})^T d_{k-1}} g_{k-1}^T d_{k-1},$$

于是 β^{DY} 也可以写为

$$\beta_k = \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}}. \tag{2.7}$$

对(2.6)式两边除以 $(g_k^T d_k)^2$，并且利用(2.7)式，得

$$\frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} = \frac{\beta_k^2 \| d_{k-1} \|^2 - 2g_k^T d_k - \| g_k \|^2}{(\beta_k g_{k-1}^T d_{k-1})^2} = \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} - \frac{2}{\beta_k g_{k-1}^T d_{k-1}} - \frac{\| g_k \|^2}{\beta_k^2 (g_{k-1}^T d_{k-1})^2} = \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} - (\frac{\| g_k \|}{\beta_k g_{k-1}^T d_{k-1}} + \frac{1}{\| g_k \|})^2 + \frac{1}{\| g_k \|^2} \leqslant \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\| g_k \|^2}. \tag{2.8}$$

记 $\omega_k = \frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2}$，则(2.8)式可重写为

$$\omega_k \leqslant \omega_{k-1} + \frac{1}{\| g_k \|^2}. \tag{2.9}$$

对(2.9)式中 k 依次取 $1,2,\cdots,k$，然后相加，并注意到 $\frac{\| d_1 \|^2}{(g_1^T d_1)^2} = \frac{1}{\| g_1 \|^2}$，可得

$$\omega_k \leqslant \frac{1}{\| g_k \|^2} + \frac{1}{\| g_{k-1} \|^2} + \cdots + \frac{1}{\| g_1 \|^2}. \tag{2.10}$$

利用(2.5)式和(2.10)式知 $\omega_k \leqslant \frac{k}{\mu^2}, \omega_k^2 \leqslant \frac{k^2}{\mu^4}$，因此 $\frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} \geqslant \frac{\mu^2}{k}, \frac{(g_k^T d_k)^4}{\| d_k \|^4} \geqslant \frac{\mu^4}{k^2}$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\{\frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2}, \frac{(g_k^T d_k)^4}{\| d_k \|^4}\} = +\infty.$$

上式与(2.1)式矛盾，此矛盾表明定理3为真，即 $\liminf\limits_{k\to\infty} \| g_k \| = 0$，因此 DY 方法在新线搜索下具有全局收敛性.

3 数值试验

将本文中新算法的数值结果与 Wolfe 线搜索下的 PRP 方法，Wolfe 线搜索下的 DY 方法以及文献[6～8]中算法的数值结果在 MATLAB 中进行测试比较(表1). 所有测试的问题均来源于文献[10]. 为了方便，本文新线搜索的 DY 方法记为 DYNWWP，WWP 线搜索的 RRP 方法记为 PRPWWP，WWP 线搜索的 DY 方法记为 DYWWP，文献[6]线搜索的 DY 方法记为 ZHANG，文献[7]线搜索的 DY 方法记为 ZHAO，文献[8]线搜索的 DY 方法记为 ZHENG；被测试问题的名称记为 Problem，问题的维数记为 Dim，迭代的次数/计算函数的次数/计算梯度的次数记为 NI/NF/NG. 其中参数 $\rho = 0.01, \sigma = 0.5, \gamma = 0.05, \| g(x_k) \| \leqslant 10^{-5}$. 按公式：

$$N_{\text{total}} = NF + m * NG, \tag{3.1}$$

计算函数值和梯度值的总数，其中 m 是一个整数. 根据文献[10,11]中自动区分的结果，可以设 $m=5$.

由于 PRPWWP 方法是一个普遍有效的共轭梯度方法，因此我们将作如下比较：对于每一个测试的例子 i，根据公式(3.1)，按照测试的方法 j ($EM(j)$)和 PRPWWP 方法的要求来计算函数值和梯度值的总数，分别表示为 $N_{\text{total},i}(EM(j))$ 和 $N_{\text{total},i}$ (PRPWWP)；然后计算比值

表 1　6 种方法的测试结果

Table 1　Results of 6 test methods

Problem	Dim	NI/NF/NG					
		PRPWWP	DYNWWP	DYWWP	ZHANG	ZHAO	ZHENG
ROSE	2	47/268/78	100/558/178	121/187/148	173/311/247	116/190/152	126/221/177
FROTH	2	15/128/23	15/83/25	68/130/96	15/35/24	45/88/63	15/35/24
BADSCP	2	86/666/142	11/222/19	771/1419/1056	670/1523/1354	561/1167/967	6959/13970/11116
BADSCB	2	10/120/16	33/461/105	385/3999/733	153/684/518	1000/3686/1478	33/461/105
BEALE	2	20/188/32	26/116/49	27/54/40	27/54/40	28/54/40	35/65/48
JENSAM	2	11/76/17	22/154/84	29/58/42	34/71/47	23/50/35	35/119/48
HELIX	3	57/248/74	30/232/65	55/98/70	112/248/205	81/139/107	34/93/67
BARD	3	39/213/54	21/295/90	54/94/66	29770/30232/30109	55/128/105	301/328/309
GAUSS	3	4/57/6	3/9/6	4/9/5	4/9/5	4/9/5	4/9/5
MEYER	3	16534/33395/24779	6/72/18	314/619/417	470/1825/1670	485/780/629	6/72/18
GULF	3	1/2/2	1/2/2	1/2/2	1/2/2	1/2/2	1/2/2
BOX	3	1/51/2	1/51/2	1/51/2	7/205/151	43/221/195	1/51/2
SING	4	198/516/281	109/1336/211	155/253/199	234/514/422	129/226/181	380/554/460
WOOD	4	176/642/273	7320/10430/7787	170/296/230	26067/33936/33507	76/143/106	13650/16969/14101
KOWOSB	4	122/452/169	9/79/27	270/442/352	4312/4860/4707	13/122/67	648/667/651
BD	4	30/147/41	22/400/68	69/233/133	45/624/543	59/156/80	22/400/68
OSB1	5	1/51/2	1/51/2	1/51/2	1/51/2	1/51/2	1/51/2
BIGGS	6	139/349/196	8/160/14	335/517/421	1250/58761/2953	208/387/346	1051/1521/1046
OSB2	11	383/1176/489	1608/8188/2061	2410/2490/2435	4558/4833/4746	1998/2191/2164	586/654/612
WATSON	20	307/839/430	77/715/146	2152/3727/2935	26747/33254/30642	987/1867/1504	5624/7294/6383
ROSEX	8	44/279/63	78/358/132	105/184/139	74/146/115	86/145/117	80/246/121
	50	38/125/58	79/363/130	72/123/93	86/218/177	111/198/156	78/164/123
	100	40/274/60	74/345/126	122/205/157	80/274/228	87/136/115	93/226/142
SINGX	4	198/516/281	109/1336/211	155/253/199	234/514/422	129/226/181	380/554/460
PEN1	2	10/212/12	37/125/107	5/107/7	29968/30033/30024	5/107/7	782/796/789
PEN2	4	17/39/25	15/81/27	40/67/50	27/51/35	42/65/54	27/51/35
	50	552/1694/839	33/206/123	310/558/432	233/741/660	157/303/232	216/448/354
VARDIM	2	4/11/8	2/55/6	4/11/8	3/58/56	4/11/8	3/11/8
	50	7/62/11	3/151/113	7/62/11	14/654/641	7/62/11	3/151/113
TRIG	3	18/131/26	57/244/118	44/65/49	51/76/58	48/74/61	36/50/38
	50	54/187/68	97/175/111	151/179/154	220/246/224	200/240/236	156/185/160
	100	66/401/88	106/187/119	173/200/176	452/478/456	206/245/241	138/167/142
BV	3	18/31/22	16/129/25	16/28/17	15/28/17	15/27/17	15/28/17
	10	76/261/96	49/356/58	130/170/143	101/135/112	100/143/126	154/186/162
IE	3	10/162/11	4/11/7	7/15/8	7/15/8	7/15/8	154/186/162
	50	6/13/7	6/16/10	6/13/7	6/13/7	6/13/7	6/13/7
	100	7/62/8	8/19/12	8/16/9	8/16/9	6/13/8	8/16/9
	200	7/14/9	6/14/9	7/14/8	7/14/8	7/14/8	7/14/8
	500	6/12/7	6/62/9	8/16/9	6/13/8	8/16/9	6/13/8
TRID	3	17/36/24	16/37/24	45/67/46	20/39/26	31/50/34	20/39/26
	50	26/99/28	80/255/85	221/262/222	171/259/221	104/161/149	155/200/160
	100	29/56/30	147/374/153	27/53/28	209/301/259	27/53/28	288/338/294
	200	30/105/35	75/249/81	305/352/307	356/452/407	96/157/149	246/296/252
BAND	3	10/20/12	9/117/15	11/23/13	9/21/13	11/23/13	9/21/13
	50	17/35/21	21/669/35	43/259/45	154/7172/2084	239/9915/1693	9/167/20
	100	5/72/8	9/167/23	11/313/17	321/15473/3324	5/136/22	9/167/23
	200	21/90/26	10/218/24	19/499/56	493/24221/3434	29/1337/130	10/218/24
LIN	2	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3
	50	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3
	500	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3
	1000	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3
LIN 1	2	2/4/3	1/3/3	2/4/3	1/3/3	2/4/3	1/3/3
	10	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3	1/3/3
LIN 0	4	2/4/3	1/3/3	2/4/3	1/3/3	2/4/3	1/3/3

$$r_i(EM(j)) = \frac{N_{\text{total},i}(EM(j))}{N_{\text{total},i}(PRPWWP)}. \tag{3.2}$$

如果 $EM(j_0)$ 对例 i_0 无效，就用一个按如下定义的正数 τ 来代替 $r_{i_0}(EM(j_0))$，

$$\tau = \max\{r_i(EM(j)) : (i,j) \notin S_1\},$$

其中 $S_1 = \{(i,j):$ 方法 j 对例 i 无效$\}$. 对于所有测试的问题，方法 $EM(j)$ 的比值的几何意义为

$$r(EM(j)) = \left(\prod_{i \in S} r_i(EM(j))\right)^{1/|S|},$$

其中 S 表示测试问题的集合，$|S|$ 是 S 中元素的数量. 上述规则的一个优点就是，比较是相对的，因此不会被那些需要计算大量函数值和梯度函数的几个问题所控制.

根据上述规则得，$r(\text{PRPWWP}) = 1$，$r(\text{DYNWWP}) = 0.8406$，$r(\text{DYWWP}) = 1.1119$，$r(\text{ZHANG}) = 2.3626$，$r(\text{ZHAO}) = 1.2360$ 和 $r(\text{ZHENG}) = 2.1490$. 很明显，DYNWWP 方法要优于其它方法.

参考文献：

[1] Wang Changyu, Du Shouqiang, Chen Yuanyuan. Global convergence propertiesof three-term conjugate gradient method with new-type line search[J]. Journalof System Science and Complexity, 2004, 17(3): 412-420.

[2] Dai Yuhong, Han Jiye, Liu Guanghui, et al. Convergence propertises of nonlinear conjugate gradient methods[J]. SIAM Journal of Optimization, 2000, 10: 345-358.

[3] 王长钰，张玉忠. s-相关 GFR 共轭梯度方法的全局收敛性[J]. 科学通报，1998，43(13)：1959-1965.

[4] 戴志锋，陈兰平. 一种混合的 HS-DY 共轭梯度法[J]. 计算数学，2005，27(4)：429-436.

[5] Dai Yuhong, Yuan Yaxiang. A nonlinear conjugate gradient with a strong global convergence property[J]. SIAM Journal of Optimization, 2000, 10: 177-182.

[6] 张秀军，徐安农. 一种新的非线性共轭梯度法的全局收敛性[J]. 广西科学，2005，12(4)：282-287.

[7] 赵银明. 一种新的非精确线性搜索下 DY 共轭梯度法的全局收敛性[J]. 沈阳理工大学学报，2008，27(3)：89-91.

[8] 郑希锋，田志远，杜守强，等. 一种线搜索下 DY 共轭梯度法的全局收敛性[J]. 青岛大学学报：自然科学版，2006，19(1)：27-29.

[9] 戴或虹，袁亚湘. 非线性共轭梯度法[M]. 上海：上海科学出版社，2000：10-11.

[10] MorèJ J, Garbow B S, Hillstrome K E. Testing unconstrained optimization software[J]. ACM Trans Math Software, 1981, 7: 17-41.

[11] Griewank A. Mathematical programming: recent developments and applications[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1989: 84-108.

（责任编辑：尹　闯）

癌症疫苗失效的元凶浮出水面

疫苗主要的工作原理是通过激活身体的免疫反应来提升免疫系统攻击癌细胞的能力，但令人费解的是，这些疫苗对肿瘤的快速增长几乎毫无遏制效果。过去，科学家一直试图利用人体自身的免疫系统来对付癌症，但种种努力均以失败告终。这说明人体内隐藏着一种蛋白质，能“窝藏”甚至培养癌细胞。因此，只有破坏这种分子才会让癌症肿瘤完全失去抵抗力并被免疫系统杀死。

最近，科学家对老鼠的基因进行了修正，让它们能够随意关闭纤维母细胞活化蛋白(FAP)的产生，然后再让老鼠患上肺癌。结果发现，当 FAP 被阻止时，肺癌肿瘤细胞被破坏，癌症开始快速地“死亡”。这说明 FAP 会阻止身体的免疫细胞去攻击癌细胞，破坏 FAP 可以让肿瘤细胞完全失去对免疫系统的抵抗力。科学家还进一步指出，FAP 同乳腺癌、肠癌、肺癌等多种癌症有关，广泛存在于间质细胞中，而间质细胞是一种组织细胞，通常会火速奔往伤口所在地辅助治疗。而癌症肿瘤会“哄骗”身体，让身体误认为癌症只是伤口，因此，身体中的免疫细胞不再去破坏肿瘤而是培养肿瘤，从而限制了疫苗的功效。老鼠肿瘤发生的情况很有可能也会在人体对应的肿瘤细胞上出现，上述过程或许也适用于人类。科学家打算进行进一步实验，弄清楚 FAP 如何对人体免疫系统施加影响。

（据科学网）