广义向量拟平衡问题系统解的强本质稳定性及广义多目标对策平衡点集的存在性*

Strong Essential Stability of the System of Generalized Vector Quasi-Equilibrium Problems and Existence of Equilibrium Points in Generalized Multiple Objective Games

宋奇庆
Song Qi-qing

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)
(College of Science,Guilin University of Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:利用不动点稳定性方法证明广义向量拟平衡问题系统(GSVQEP)解的存在性及解集的强本质连通区的存在性,并将该结果应用于广义多目标对策的研究,证明广义多目标对策强本质平衡点集的存在性和强本质 weak Pareto-Nash 平衡点集的存在性.

关键词:广义向量拟平衡问题 强本质集 weak Pareto-Nash 平衡点
中图法分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0026-04

Abstract: We consider the system of generalized vectorquasi-equilibrium and prove the existence of its solution. Consequently, we get the existence of strongly essential sets for its solution sets. As an application, we derive the existence of strongly essential equilibrium points of generalized multiple objective games and strongly essential weak Pareto-Nash equilibrium.

Key words: system of generalized vector quasi-equilibrium, strong essential sets, weak Pareto-Nash equilibrium

广义向量拟平衡问题系统(GSVQEP)是研究许多非线性问题的抽象方法,如非合作对策平衡点,鞍点,变分不等式,非线性补问题.它是向量拟平衡问题的集值情形的推广.关于向量拟平衡问题解的存在性和稳定性已有许多研究结果[1~4],但是关于GSVQEP解的稳定性还少有报道.近年来,不动点集的稳定性又得到进一步的研究,Xiang[5]引入集值映射不动点集强本质集,这是比不动点集合的本质稳定性[6]更能抗扰动的解集概念.本文主要研究广义向量拟平衡问题系统的解和解集的强本质性和广义多目标对策平衡点的稳定性.利用不动点集的强本质性方法,证明 GSVQEP 解集的强本质连通区的存在性.并把该结果应用于广义多目标对策的研究,得到稳定的强本质平衡点集的存在性.

1 预备知识

设 H 是拓扑向量空间,θ 表示 H 中的零元素.称 C 是 H 中的一个闭凸尖锥,如果 $C \subset H$ 为闭凸集,对于任意 $c \in C$ 和 $\forall t > 0$ 有 $tc \in C$,且 $C \cap (-C) = \{\theta\}$.

设 I 为指标集,对任意的 $i \in I$,E_i, Y_i 为拓扑向量空间,K_i 为 E_i 的非空凸子集.记 $K = \times_{i\in I} K_i$,$K_{-i} = \times_{j\in I\setminus i} K_j$,$E = \times_{i\in I} E_i$,$Y = \times_{i\in I} Y_i$.又设 $C_i : K \to 2^{Y_i}$ 为集值映射,使得任意 $x \in K$,$C_i(x)$ 为一个闭凸尖锥且 $\mathrm{int} C_i(x) \neq \varnothing$.对任意的 $i \in I$,$\varphi_i : K \times K_i \to 2^{Y_i}$ 为一个集值映射,$G_i : K_{-i} \to 2^{K_i}$ 为非空集值映射,则广义向量拟平衡问题系统(GSVQEP)指:求 $\bar{x} \in K$,使得

$$\forall i \in I, \bar{x}_i \in G_i(\bar{x}_{-i}) : \varphi_i(\bar{x}, y_i) \not\subset -\mathrm{int} C_i(\bar{x}), \forall y_i \in G_i(\bar{x}_{-i}).$$

收稿日期:2010-04-21
作者简介:宋奇庆(1980-),男,讲师,主要从事优化与对策论研究。
*广西教育厅科研基金项目(200702LX215)资助。

若 φ_i 映为 Y_i 上的向量值，广义向量拟平衡问题系统就是向量拟平衡问题系统(SVQEP)，若进一步有 $G_i(x_{-i})=K_i,\forall x_{-i}\in K_{-i}$，则 SVQEP 就是向量平衡问题系统(SVEP).

定义 1.1 设 D 是拓扑向量空间 E 中的一个非空凸子集，C 是 H 中的闭凸尖锥，且 $\varphi:D\to 2^H$ 是一个集值映射.

(i)如果对 $\forall x_1,x_2\in D,\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $\varphi(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subseteq\lambda\varphi(x_1)+(1-\lambda)\varphi(x_2)+C$，则称 φ 是 C 凹的.

(ii)如果对 $\forall x_1,x_2\in D,\forall\lambda\in[0,1],\exists\mu\in[0,1]$ 使得 $\varphi(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subseteq\mu\varphi(x_1)+(1-\mu)\varphi(x_2)+C$，则称 φ 是 C 自然拟凹的.

注 1.1 若 φ 是 C 凹的，则一定是 C 自然拟凹的. φ 是单值函数，且当 $H=R,C=R_+$ 时，φ 是 R_+ 自然拟凹的等价于 φ 是拟凹的.

定义 1.2[7] 设 D 是拓扑向量空间 E 中的一个非空凸子集，C 是 H 中的闭凸尖锥，称向量值函数 $f:D\to H$ 在 $x_0\in D$ 处是 C 连续的，当且仅当对 $\theta\in H$ 的任意开邻域 V，存在 x_0 在 D 中的开邻域 U，有 $f(x)\in f(x_0)+V+C,\forall x\in U$. 如果 f 在 D 中的每一点都是 C 连续的，则称 f 在 D 上是 C 连续的.

注 1.2 向量值函数 $f:D\to H$ 是 C 连续的，则集合 $\{x\in D,f(x)\in\mathrm{int}C\}$ 是开集.

引理 1.1[4] 设 X 是拓扑向量空间 E 中的非空闭凸子集. $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m):X\to R^m$ 是 R^m_+ 连续的，当且仅当对每一个 $i\in\{0,1,\cdots,m\}$，f_i 是下半连续的.

定义 1.3 设 K 为 E 的非空凸子集. 称 $C:K\to 2^Y$ 为一个锥映射，若 C 使得 $\forall x\in K,C(x)$ 为一个锥且 $\mathrm{int}C(x)\neq\varnothing$. 称 C 是线性凸锥映射，如果 $C(x)$ 是凸的且对任意 $x,y\in K,\forall t\in[0,1]$ 有 $t\mathrm{int}C(x)+(1-t)\mathrm{int}C(y)\subset\mathrm{int}C(tx+(1-t)y)$. 很显然当 $C(x)\equiv C$ 且为凸锥时，C 就是线性凸锥映射.

平衡问题实质上反映了点与点之间关于映射值的一种平衡关系. 设 Z 为 Huasdorrf 拓扑向量空间 X 中的凸紧集，$\varphi:X\times K\to Y,C$ 为 Y 中的闭凸锥. 若 $z,y\in Z,\varphi(z,y)\not\subset-\mathrm{int}C$，则称 z 在 Z 上是 y 的较优反应，当 $\varphi(z^*,y)\not\subset-\mathrm{int}C,\forall y\in Z$，则 z^* 是关于 x 在 Z 上的最佳选择. GSVQEP 也与之非常类似.

引理 1.2 设 $Z\subset X$，定义在 Z 自身上的集值映射 N，使得 $N(x)=\{y\in Z:\varphi(x,y)\subseteq-\mathrm{int}C\},\forall x\in Z$. 若 φ 满足：

(1) $\forall y\in X$，集合 $\{x\in X:\varphi(x,y)\not\subset-\mathrm{int}C\}$ 在 X 中闭；

(2) $\forall x\in X$，$y\to\varphi(x,y)$ 是 $-C$ 凹的；

(3) $\forall x\in X$，若 $x\in Z$，则 $\varphi(x,x)\not\subset-\mathrm{int}C$.

则存在 Z 上的最佳选择 x^*.

证明 (i) $N(x)$ 是凸集. 事实上，对 $\forall y_1,y_2\in N(x),\lambda\in[0,1]$，由于 φ 关于 y 是 $-C$ 凹的，从而

$\varphi(x,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\subseteq\lambda\varphi(x,y_1)+(1-\lambda)\varphi(x,y_2)-C\subseteq-\mathrm{int}C$,

即 $(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in N(x)$，故 $N(x)$ 是凸集.

(ii) $\forall y\in Z$，由 (1) 知 $N^{-1}(y)=\{x:y\in N(x)\}=\{x:\varphi(x,y)\subseteq-\mathrm{int}C\}$ 在 Z 中开.

假设 $N(x)$ 为非空集，由 Browder 不动点定理[8]，$N(x)$ 在 Z 上有不动点. 这与条件(3)矛盾. 因此 $\exists\ x^*$ 使得 $N(x^*)=\varnothing$，即 x^* 是 Z 上的最佳选择.

设 $(K,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间 E 的一个非空凸紧子集，$\overline{K}(K)$ 表示 K 的非空紧子集的全体，$K\times K$ 为积赋范空间. 对任意 $\varepsilon>0$，用 $N_\varepsilon(A)$ 表示 $A\subset K$ 的 ε 邻域，即 $\{y\in K:\inf_{x\in A}\|x-y\|<\varepsilon\}$.

设 $M=\{T:T:K\to\overline{K}(K)$ 为非空闭凸值上半连续集值映射$\}$. 任意 $T\in M,F(T)$ 表示 T 的不动点集. 任意 $T_1,T_2\in M$，定义 $\rho_h(T_1,T_2)=\sup_{x\in K}H_d(T_1(x),T_2(x))$，其中 H_d 为 $\overline{K}(K)$ 上的 Hausdorff 度量，则 (M,ρ_h) 是一个度量空间[1].

设 $R\in M$，称 $P(R,\delta)=\{T\in M:T(x)\subset\mathrm{co}(N_\delta(R(N_\delta(x)))),\forall x\in K\}$ 为 R 关于 (M,ρ_h) 的混合 δ-扰动类. 这是比一般的扰动类 $\{T\in M:\rho_h(T,R)<\delta\}$ 更强的扰动.

定义 1.4 设 $R\in M$，非空闭子集 $e(R)\subset F(R)$ 称为 $F(R)$ 的强本质集，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，使得 $N_\varepsilon(e(R))\cap F(T)\neq\varnothing,\forall T\in P(R,\delta)$. 若 $e(R)$ 是单点集 $\{x^*\}$，则称 x^* 为 $F(R)$ 的强本质点. $F(R)$ 的连通区 $C(R)$ 称为 $F(R)$ 的强本质连通区，如果它包括 $F(R)$ 的一个强本质集.

引理 1.3[5] 对 $\forall R\in M,F(R)$ 至少有一个关于 $P(R,\delta)$ 的强本质连通区.

2 GSVQEP 的解及其解集强本质集的存在性

定理 2.1 设广义向量拟平衡问题系统中对任意 $i\in I,E_i,Y_i$ 为实 Banach 空间，$C_i:E_i\to 2^{Y_i}$ 为线性凸锥映射，对任意 $x\in K,P_i=\bigcap_{x\in K}C_i(x)\neq\varnothing$. 若满足：

(1) $\forall i\in I,K_i$ 是紧的，G_i 在 K_{-i} 上为连续紧凸值的；

(2) $\forall i\in I,\forall y_i\in K_i$，集合 $\{x\in K:\varphi_i(x,y_i)\not\subset-\mathrm{int}C_i(x)\}$ 在 K 中闭；

(3) $\forall x\in K,\forall i\in I,y_i\to\varphi_i(x,y_i)$ 是 $-P_i$ 自然拟凹的；

(4) $\forall i \in I, \forall x_{-i} \in K_{-i}, \forall y_i \in K_i, x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-P_i$ 凹的；

(5) $\forall x \in K, \forall i \in I$，若 $x_i \in G_i(x_{-i})$，则 $\varphi_i(x, x_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i(x)$.

则 GSVQEP 有解.

证明 设 $B(x) = \times_{i\in I} B_i(x), \forall x \in K$，其中

$B_i(x) = \{z_i \in G_i(x_{-i}) : \varphi_i(z_i, x_{-i}, y_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i(x), \forall y_i \in G_i(x_{-i})\}$.

显然 B 是 K 上的集值映射，若 $B(x)$ 在 K 上有不动点 $\bar{x}$，即为 GSVQEP 的解，且 GSVQEP 的解集与 B 的不动点集 $F(B)$ 是等价的.

先证 $B(x)$ 非空. 对 $\forall x \in K$，定义

$Q_i(x_i) = \{y_i \in G_i(x_{-i}) : \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i) \subseteq -\mathrm{int}C_i(x)\} : G_i(x_{-i}) \to 2^{G_i(x_{-i})}$.

令 $Q_i(x_i)$，$G_i(x_{-i})$，K，φ_i 分别为引理 1.2 中的 $N(x), Z, X$ 和 φ. 由于 φ_i 关于 y_i 是 $-P_i$ 自然拟凹的，从而存在 $\mu \in [0,1]$ 使得

$\varphi_i(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \subseteq \mu\varphi_i(x, y_1) + (1-\mu)\varphi_i(x, y_2) - P_i \subseteq -\mathrm{int}C_i(x)$,

即得 $N(x)$ 是凸集. 从而由引理 1.2 可得，存在 x_i^* 使得 $Q_i(x_i^*) = \varnothing$，即 $B_i(x)$ 非空，从而 $B(x)$ 非空.

再证集值映射 B_i 是上半连续的，只需证图 $Gr(B_i) = \{(x, z_i) : z_i \in B_i(x)\}$ 为闭的. 取 $\forall (x^n, z_i^n) \in Gr(B_i)$ 且 $(x^n, z_i^n) \to (x^0, z_i^0)$，即 $z_i^n \in G_i(x_{-i}^n)$ 且 $\varphi_i(z_i^n, x_{-i}^n, y_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i(z_i^n, x_{-i}^n)$，$\forall y_i \in G_i(x_{-i}^n)$. 对 $y_i \in G_i(x_{-i}^n)$，设 $\Lambda_{y_i} = \{x \in K : \varphi_i(x, y_i) \not\subset -\mathrm{int}C_i(x)\}$，则 Λ_{y_i} 是 K 中的闭集. 显然 $(z_i^n, x_{-i}^n) \in \Lambda_{y_i}, \forall y_i \in G_i(x_{-i}^n)$，由 $(x^n, z_i^n) \to (x^0, z_i^0)$，故 $(z_i^n, x_{-i}^n) \to (z_i^0, x_{-i}^0)$，又由 Λ_{y_i} 闭，知 $(z_i^0, x_{-i}^0) \in \Lambda_{y_i}$，$\forall y_i \in G_i(x_{-i}^n)$，另外由 G_i 连续，故 $z_i^0 \in G_i(x_{-i}^0)$，从而 $Gr(B_i)$ 闭，从而 B_i 是上半连续的且为闭值的.

最后证 $B_i(x)$ 是凸的. 取 $\forall z_1, z_2 \in B_i(x)$，显然有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in G_i(x_{-i})$，由(4)知 $x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-P_i$ 凹的，且 C_i 为线性凸锥映射，从而

$\varphi_i(tz_1 + (1-t)z_2, x_{-i}, y_i) \subseteq t\varphi_i(z_1, x_{-i}, y_i) + (1-t)\varphi_i(z_2, x_{-i}, y_i) - P_i \subseteq \mathrm{int}C_i(tz_1 + (1-t)z_2, x_{-i}, y_i) - P_i \subseteq -\mathrm{int}C_i(tz_1 + (1-t)z_2, x_{-i}, y_i)$.

因此 B 是紧集 K 上的上半连续闭凸集值映射，由 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理[9]可得集值映射 B 在 K 上有不动点，即 GSVQEP 有解.

注 2.1 从定理 2.1 证明过程易知，当 E_i, Y_i 为 Hausdorff 局部凸拓扑向量空间时仍然是成立的.

定理 2.2 若广义向量拟平衡问题系统中对任意 $i \in I, E_i, Y_i$ 为实 Banach 空间，设 $C_i(x) \equiv C_i$，则 $P_i = C_i$. 若满足定理 2.1 中的条件(1)、(2)、(3)、(5)及 $\forall i \in I, \forall (x_{-i}, y_i) \in K_{-i} \times K_i, x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-C_i$ 自然拟凹的，则 SVQEP 有解.

证明 由定理 2.1 的证明过程可知，只需证明 $B_i(x)$ 是凸的. 取 $\forall z_1, z_2 \in B_i(x)$，显然有 $tz_1 + (1-t)z_2 \in G_i(x_{-i})$，由 $x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-C_i$ 自然拟凹的，从而

$\varphi(tz_1 + (1-t)z_2, x_{-i}, y_i) \subseteq \mu\varphi(z_1, x_{-i}, y_i) + (1-\mu)\varphi(z_2, x_{-i}, y_i) - C_i \subseteq -\mathrm{int}C_i$,

故 $B_i(x)$ 凸.

设 Σ 为满足定理 2.1 的所有条件的 SVQEP 的集合. 取 $\forall \sigma \in \Sigma$，用 $S(\sigma)$ 表示 σ 的解的全体. 用 $F(B_\sigma)$ 表示 σ 所对应的定理 2.1 证明中的上半连续闭凸集值映射 B 的不动点集. 显然有 $S(\sigma) = F(B_\sigma)$，而且 $B_\sigma \in M$，其中 M 为第一部分中所定义的.

定义 2.1 对任意 $\sigma \in \Sigma$，称集合 $S_\sigma \subset S(\sigma)$ 为 $S(\sigma)$ 的强本质平衡解集(点)，如果 S_σ 是关于 $P(R, \delta)$ 的强本质平衡集(且 $S(\sigma)$ 是单点集).

由引理 1.3 及定义 2.1 容易得

定理 2.3 任意广义向量拟平衡问题系统 $\sigma \in \Sigma$，存在 Σ 的强本质平衡连通区. 若 $S(\sigma)$ 为单点集，则一定是强本质平衡点.

3 广义多目标对策平衡点和 weak Pareto-Nash 平衡点及其强本质集的存在性

设 I 为局中人集合，对每一 $i \in I$，用 K_i 表示第 i 个人的策略集，$K_{-i} = \times_{j\in I\setminus i} K_j$，$G_i : K_{-i} \to 2^{K_i}$ 是第 i 个人的可行策略对应，$F^i : K \to 2^{R^{k_i}}$ 是第 i 个人的支付映射，记 $F^i = (f_1^i, f_2^i, \cdots, f_{k_i}^i)$. 则称多元组 $\Gamma = (K_i, G_i, F^i)$，$i \in I$ 为 n 人广义多目标对策. 当支付映射为一般向量值函数 $\tilde{F}^i$ 时，多元组 $\tilde{\Gamma} = (K_i, G_i, \tilde{F}^i)$，$i \in I$ 即为一般的 n 人多目标广义对策. 它是 Debreu 提出的抽象经济(1952)模型的扩展.

定义 3.1 设 $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*) \in K$，如果对 $\forall i \in I, x_i^* \in G_i(x_{-i}^*)$，且 $F^i(y_i, x_{-i}^*) \not\subset F^i(x_i^*, x_{-i}^*) + \mathrm{int}R_+^{k_i}, \forall y_i \in G_i(x_{-i}^*)$，则称$(x_i^*, x_{-i}^*)$ 为关于 Γ 的平衡点. 当支付映射为一般向量值函数 $\tilde{F}^i$ 时，(x_i^*, x_{-i}^*) 称为 $\tilde{\Gamma}$ 的 weak Pareto-Nash 平衡点[4].

定理 3.1 若对任意 $i \in I, K_i$ 为紧集，$\Gamma = (K_i, G_i, F^i)$ 满足：

(1) $\forall i \in I, K_i$ 是紧的，G_i 在 K_{-i} 上为连续紧凸值的；

(2) $\forall i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i, f_j^i$ 是凸集值映射且使得 $\forall y_i \in K_i, A_j^i = \{x \in K : f_j^i(y_i, x_{-i}) - f_j^i(x_i, x_{-i}) \not\subset \mathrm{int}R_+^{k_i}\}$ 在 K 中闭；

(3) $\forall i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i, x_{-i} \in K_{-i}, u_i \to f_j^i(u_i,$

x_{-i}) 是 R_+^{ki} 凹的.

则存在关于 Γ 的平衡点.

证明 对任意 $i \in I$,作 $\varphi_i: K_i \times K_{-i} \times K_i \to 2^{R_+^{ki}}$ 使得对任意 $(x_i, x_{-i}, x_i) \in K_i \times K_{-i} \times K_i$,有 $\varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i) = F^i(y_i, x_{-i}) - F^i(x_i, x_{-i})$ 表示集合 $\{\alpha - \beta: \forall \alpha \in F^i(y_i, x_{-i}), \beta \in F^i(x_i, x_{-i})\}$. 令 $C_i = -R_+^{ki}$. 由(2),$y_i \in K_i$,集合

$$\{x \in K: \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i) \not\subset -\text{int}C_i\} = \{x \in K: F^i(y_i, x_{-i}) - F^i(x_i, x_{-i}) \not\subset -\text{int}C_i\}$$

在 K 中是闭集. 对任意 $i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i, \forall x_{-i} \in K_{-i}, u_i \to f_j^i(u_i, x_{-i})$ 是 R_+^{ki} 凹的,则有 $y_i \to \varphi_i(x, y_i)$ 是 $-(-R_+^{ki})$ 凹的. 事实上,对 $\forall y_i^1, y_i^2, t \in [0,1]$,

$$\varphi_i(x_i, x_{-i}, ty_i^1 + (1-t)y_i^2) = F^i(ty_i^1 + (1-t)y_i^2, x_{-i}) - F^i(x_i, x_{-i}) \subseteq tF^i(y_i^1, x_{-i}) + (1-t)F^i(y_i^2, x_{-i}) - F^i(x_i, x_{-i}) + R_+^{ki}.$$

由(2),f_j^i 为凸值的,故

$$\varphi_i(x_i, x_{-i}, ty_i^1 + (1-t)y_i^2) \subseteq t\varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i^1) + (1-t)\varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i^2) + R_+^{ki}.$$

同理可得 $x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-(-R_+^{ki})$ 凹的. 对 $\forall x \in K, i \in I$,若 $x_i \in G_i(x_{-i})$,则 $\varphi_i(x, x_i) \not\subset \text{int}R_+^{k_i}$ (至少有 $0 \notin \text{int}R_+^{ki}$). 因此对任意的 $i \in I$,φ_i 满足定理 2.1 的条件,故存在 $x^* \in K$,使得 $x_i^* \in G_i(x_{-i}^*)$: $\varphi_i(x^*, y_i) \not\subset -\text{int}C_i(x^*)$, $\forall y_i \in G_i(x_{-i}^*)$. 即对任意 $i \in I$, $x_i^* \in G_i(x_{-i}^*)$,且 $F^i(y_i, x_{-i}^*) - F^i(x_i^*, x_{-i}^*) \not\subset \text{int}R_+^{ki}$, $\forall y_i \in G_i(x_{-i}^*)$,亦即 x^* 就是关于 Γ 的平衡点.

定理 3.2 若对任意 $i \in I$,K_i 为紧集,$\tilde{\Gamma} = (K_i, G_i, \tilde{F}^i)$ 满足:

(1) $\forall i \in I$,K_i 是紧的,G_i 在 K_{-i} 上为连续紧凸值的;

(2) $\forall i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i$,$\tilde{f}_j^i$ 在 K 上是下半连续的;

(3) $\forall i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i, \forall x_{-i} \in K_{-i}, u_i \to \tilde{f}_j^i(u_i, x_{-i})$ 是拟凹的.

则 $\tilde{\Gamma}$ 有 weak Pareto-Nash 平衡点.

证明 根据定理 3.1 的证明过程,作同样的 φ_i,取同样的 C_i. 由于 $\tilde{f}_j^i$ 在 K 上是下半连续的,因此由引理 1.1 知 F^i 在 K 上是 $R_+^{k_i}$ 连续的,再由注 1.2 可得,对任意 $y_i \in K_i$,集合 $\{x \in K: \varphi_i(x, y_i) \notin -\text{int}C_i\}$ 是闭集.

由于对任意 $i \in I, 1 \leqslant j \leqslant k_i, \forall x_{-i} \in K_{-i}, u_i \to \tilde{f}_j^i(u_i, x_{-i})$ 是拟凹的,再由注 1.1 得,$y_i \to \varphi_i(x, y_i)$ 是 $-(-R_+^{k_i})$ 自然拟凹的,且 $x_i \to \varphi_i(x_i, x_{-i}, y_i)$ 是 $-(-R_+^{ki})$ 自然拟凹的. 其他证明同定理 3.1,可得 $\tilde{\Gamma}$ 存在 weak Pareto-Nash 平衡点.

设 Σ 为满足定理 3.1 所有条件的 Γ 集合,对任意 $\Gamma \in \Sigma$,由定理 2.1 的证明知,Γ 的平衡点 $S(\Gamma)$ 与由定理 3.1 中对应的向量拟平衡问题系统 $\varphi_{\tilde{\Gamma}}$ 的解等价,也与 φ_Γ 对应的定理 2.1 的上半连续闭凸集值映射 B_Γ 的不动点 $F(B_\Gamma)$ 等价.

定义 3.2 对任意 $\Gamma \in \Sigma, S_\Gamma \subset S(\Gamma)$ 称为 Γ 的强本质平衡点集(点),如果 S_Γ 是关于 $P(R,\delta)$ 的强本质集(且 S_Γ 为单点集).

由引理 1.3 与定义 3.2 可得以下结果:

定理 3.3 任意广义多目标对策 $\Gamma \in \Sigma$,必然有 Γ 的平衡点的强本质连通区.

定理 3.4 若 $\Gamma \in \Sigma, S(\Gamma)$ 为单点集,则必是 Γ 的强本质平衡点.

注 3.1 定理 3.2 推广了文献[4]中的相关结果. 类似于定理 3.2 和定理 3.3,同样可以得到关于 weak Pareto-Nash 平衡点集的强本质集的存在性,本质意义下它比文献[1,4]对策中的解更稳定.

参考文献:

[1] Yang H, Yu J. Essential solutions and the essential components of solution set of vector quasi-eqilibrium problems[J]. J Sys Sci Math Scis, 2004, 24(1): 74-84.

[2] Lin Z, Yang H, Yu J. On existence and essential components of the solution set for the system of vector quasi-equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal, 2005, 63: 2445-2452.

[3] Ansari Q H, Siddiqi A H. Existence and duality of generalized vector equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 115-126.

[4] Yang H, Yu J. On essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points[J]. Appl Math Lett, 2002, 15: 553-560.

[5] Xiang S W, Liu G D, Zhou Y H. On the strongly essential components of Nash equilibria of infinite n-person games with quasiconcave payoffs[J]. Nonlinear Anal, 2005, 63: e2637-e2647.

[6] Kinoshita S. On essential components of the set of fixed points[J]. Osaka J Math, 1952, 4: 19-22.

[7] Luc D T. Theory of vector optimization[M]. Germany: Springer-Verlag, 1989, Chapter 1.

[8] Browder F. The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces[J]. Math Ann, 1968, 177: 83-301.

[9] Glicksberg I. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points[J]. Pro Amer Math Soc, 1952, 3: 170-174.

(责任编辑:尹 闯)