

# 一类改进的 Leslie 型捕食与被捕食系统的动力学分析\*

## Study on Dynamics of a Modified Leslie Predator-Prey System

陈玉明, 李群宏, 徐德贵

CHEN Yu-ming, LI Qun-hong, XU De-gui

(广西大学数学与信息科学学院, 广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:**综合考虑对 Leslie 型捕食与被捕食系统影响较大的一些因素, 提出一类改进的 Leslie 型捕食与被捕食系统. 应用非线性动力学、多项式系数关系等理论及 Lyapunov 系数方法研究改进系统的动力学行为, 得到系统存在稳定平衡点及 Hopf 分岔等情形时参数应满足的条件, 并通过数值仿真验证所得结果是正确的.

**关键词:**非线性理论 Leslie 系统 Hopf 分岔 Bautin 分岔

**中图分类号:**O175 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2011)01-0007-04

**Abstract:** This paper presented a modified Leslie predator-prey system in which several important factors were considered. The theory of non-linear dynamics, Routh-Hurwitz theorem and the method of Lyapunov coefficient were applied to investigate the dynamical behaviors of the modified system. Then, the necessary parameter conditions for the appearance of the steady equilibrium and the Hopf bifurcation were obtained. Finally, the discussion was verified by numerical simulation.

**Key words:** nonlinear theory, Leslie system, Hopf bifurcation, Bautin bifurcation

运用数学方法研究生物模型是一个很重要的研究领域<sup>[1,2]</sup>. 1948 年 Leslie<sup>[3]</sup> 提出著名的捕食者-食饵两种群的 Leslie 系统, 文献[4]对该系统进行了研究并且引入功能性反应函数, 证明系统存在极限环, 并得到了极限环存在的条件. 在大部分情况下, 捕食者不得不主动搜索食物, 这时“比率依赖”理论的应用将使模型更加贴合实际, 文献[5]对引入“比率依赖”的捕食系统进行分析, 得到系统全局稳定性及极限环存在性等相关结论. 但是现实生物系统中, 食饵对于捕食者并不是没有任何的自我保护能力, 所以有可能被捕食者捕获的食饵只占总数的一部分, 文献[6,7]分别讨论具有庇护所的两种群和三种群捕食系统, 分析

庇护所给这类生物系统带来的影响. 文献[8]对具有 Holling 型功能函数的 Leslie 系统进行了 Hopf 分岔分析. 文献[9]利用连续系统离散化的方法, 得到离散 Leslie 捕食与被捕食系统, 并讨论其周期解的稳定性. 文献[10]考虑到食饵传染病给系统带来的影响, 讨论系统的局部稳定性和 Hopf 分岔.

上述研究大部分只针对某单个因素对系统的影响, 把各类因素综合起来讨论的报道还极为少见. 本文讨论的模型综合了以上研究中对系统影响较大的因素, 利用非线性动力学的理论知识, 分析 Leslie 系统稳定性、产生极限环的 Hopf 分岔的存在性、Hopf 分岔的退化等性质, 得到了一些更加丰富、直观的结果. 具体模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - \frac{\alpha(1-m)x}{\beta y + (1-m)x}y, \\ \frac{dy}{dt} = sy(1 - h \frac{y}{(1-m)x}), \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x$  是食饵种群在时刻  $t$  的密度,  $y$  是捕食者种

收稿日期: 2010-04-06

修回日期: 2010-06-06

作者简介: 陈玉明(1987-), 男, 硕士研究生, 主要从事微分方程的稳定性研究.

\* 广西壮族自治区自然科学基金项目(2010GXNSFA013110); 广西壮族自治区青年科学基金项目(0832014)资助.

群在时刻  $t$  的密度,  $a$  是食饵的内禀增长率,  $\frac{a}{b}$  是食饵种群的容纳量,  $s$  是捕食者种群的内禀增长率,  $\frac{x}{h}$  是捕食者种群的容纳量,  $h$  是食饵转化为捕食者的量度,  $m$  是食饵种群的避难比率 ( $0 < m < 1$ ).

### 1 系统平衡点及其稳定性

为求系统(1)的平衡点,令方程组(1)的右端项为零,解得系统的平衡点为  $E(\bar{x}, \bar{y})$ , 其中

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{a(h+\beta) - (1-m)\alpha}{b(h+\beta)}, \\ \bar{y} = \frac{(1-m)[a(h+\beta) - (1-m)\alpha]}{bh(h+\beta)}. \end{cases} \quad (2)$$

**定理 1.1** 当条件  $a(h+\beta) - (1-m)\alpha > 0$  满足时,系统的平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  为正平衡点.

由(2)式可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dm} = \frac{\alpha}{b(h+\beta)}, \\ \frac{dy}{dm} = \frac{2\alpha(1-m) - a(h+\beta)}{bh(h+\beta)}. \end{cases}$$

**定理 1.2** 对食饵种群  $x$ , 当  $m > 1 - \frac{a(h+\beta)}{\alpha}$  时,  $x$  随  $m$  的增大而增大; 对于捕食者种群  $y$ , 当  $1 - \frac{a(h+\beta)}{\alpha} < m < 1 - \frac{a(h+\beta)}{2\alpha}$  时,  $y$  随  $m$  的增大而增大, 当  $m > 1 - \frac{a(h+\beta)}{2\alpha}$  时,  $y$  随  $m$  的增大而减小.

系统(1)的 Jacobi 矩阵为

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - \frac{a\beta(1-m)y^2}{(\beta y + (1-m)x)^2} & -\frac{\alpha(1-m)^2 x^2}{(\beta y + (1-m)x)^2} \\ \frac{shy^2}{(1-m)x^2} & s - \frac{2shy}{(1-m)x} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

把平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  处的坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$  代入(3)式中, 得

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(1-m)(2h+\beta)}{(h+\beta)^2} - a & -\frac{ah^2}{(h+\beta)^2} \\ \frac{s(1-m)}{h} & -s \end{pmatrix}.$$

对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha(1-m)(2h+\beta)}{(h+\beta)^2} - a - \lambda & -\frac{ah^2}{(h+\beta)^2} \\ \frac{s(1-m)}{h} & -s - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 + M\lambda + N = 0, \quad (4)$$

其中  $M = s +$

$$\frac{[a(h+\beta) - (1-m)\alpha](h+\beta) - (1-m)h\alpha}{(h+\beta)^2}, N = \frac{[a(h+\beta) - (1-m)\alpha]s}{h+\beta}.$$

特征方程(4)只有负实部特征值的充分必要条件是  $M > 0$  且  $N > 0$ , 即

$$\begin{cases} s + \frac{[a(h+\beta) - (1-m)\alpha](h+\beta) - (1-m)h\alpha}{(h+\beta)^2} > 0, \\ \frac{[a(h+\beta) - (1-m)\alpha]s}{h+\beta} > 0. \end{cases}$$

于是  $E(\bar{x}, \bar{y})$  渐近稳定的充要条件是

$$a(h+\beta) - (1-m)\alpha > \max\{0, \frac{h\alpha(1-m)}{h+\beta} - s(h+\beta)\}.$$

**定理 1.3** 系统(1)的平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  为渐近稳定的正平衡点的充要条件是

$$a(h+\beta) - (1-m)\alpha > \max\{0, \frac{h\alpha(1-m)}{h+\beta} - s(h+\beta)\}.$$

### 2 系统 Hopf 分岔

考虑正平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  处的特征方程  $\lambda^2 + M\lambda + N = 0$ , 由于该方程的常数项  $N = \frac{[a(h+\beta) - (1-m)\alpha]s}{h+\beta} \neq 0$ , 所以在  $E(\bar{x}, \bar{y})$  处不可能发生 Fold 分岔.

假设正平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  处的特征方程  $\lambda^2 + M\lambda + N = 0$  具有一对共轭纯虚根  $\pm i\omega$ , 其中  $\omega > 0$ , 则  $M = 0, N = \omega^2$ , 即

$$a(h+\beta) - (1-m)\alpha = \frac{h\alpha(1-m)}{h+\beta} - s(h+\beta) > 0, \omega = \sqrt{N}.$$

由文献[11], 有

**定理 2.1** 当参数满足条件  $(a+s)(h+\beta)^2 = \alpha(1-m)(2h+\beta), a(h+\beta) - (1-m)\alpha > 0$  时, 系统(1)在其正平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  处发生 Hopf 分岔.

假设定理 2.1 的条件已经满足, 通过坐标平移把系统(1)的正平衡点  $E(\bar{x}, \bar{y})$  平移到原点  $(0, 0)$ , 原系统(1)变成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_{20}^1 x^2 + 2B_{11}^1 xy + B_{02}^1 y^2 \\ B_{20}^2 x^2 + 2B_{11}^2 xy + B_{02}^2 y^2 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{6} \left[ C_{30}^1 x^3 + 3C_{21}^1 x^2 y + 3C_{12}^1 x y^2 + C_{03}^1 y^3 \right] + O(x, y)^4, \quad (5)$$

其中  $A = J(E(x, y))$ ,  $B_{jk}^i, C_{jk}^i$  均为只与参数有关的常数, 取值如下:

$$B_{20}^1 = -2b + \frac{2\alpha\beta(1-m)^2 y^2}{(\beta y + (1-m)x)^3}, B_{11}^1 = -\frac{2\alpha\beta(1-m)^2 xy}{(\beta y + (1-m)x)^3}, B_{02}^1 = \frac{2\alpha\beta(1-m)^2 x^2}{(\beta y + (1-m)x)^3},$$

$$B_{20}^2 = -\frac{2shy^2}{(1-m)x^3}, B_{11}^2 = \frac{2shy}{(1-m)x^2},$$

$$B_{02}^2 = -\frac{2sh}{(1-m)x}, C_{30}^1 = -\frac{6\alpha\beta(1-m)^3 y^2}{(\beta y + (1-m)x)^4},$$

$$C_{21}^1 = \frac{4\alpha\beta(1-m)^3 xy - 2\alpha\beta^2(1-m)^2 y^2}{(\beta y + (1-m)x)^4}, C_{12}^1 = \frac{4\alpha\beta^2(1-m)^2 xy - 2\alpha\beta(1-m)^3 x^2}{(\beta y + (1-m)x)^4}, C_{03}^1 = -\frac{6\alpha\beta^2(1-m)^2 x^2}{(\beta y + (1-m)x)^4}, C_{30}^2 = \frac{6shy^2}{(1-m)x^4},$$

$$C_{21}^2 = -\frac{4shy}{(1-m)x^3}, C_{12}^2 = \frac{2sh}{(1-m)x^2}, C_{03}^2 = 0.$$

构建两个多线性二维向量函数  $B(x, y)$  和  $C(x, y, z)$ :  $C_i(x, y, z) = C_{30}^i x_1 y_1 z_1 + C_{21}^i (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) + C_{12}^i (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + C_{03}^i x_2 y_2 z_2$ ,  $B_i(x, y) = B_{20}^i x_1 y_1 + B_{11}^i (x_1 y_2 + x_2 y_1) + B_{02}^i x_2 y_2$ , 其中  $i = 1, 2$ ,  $x, y, z$  均为二维向量.

假设  $q$  表示矩阵  $A$  对应于特征值  $i\omega$  的特征向量,  $p$  表示矩阵  $A^T$  对应于特征值  $-i\omega$  的特征向量, 且  $p$  要求满足  $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 1$ , 则

$$q = \left( \frac{h}{1-m} + i \frac{\omega h}{s(1-m)}, 1 \right), p = (p_1, p_2),$$

其中

$$p_1 = \{s(1-m)(h+\beta)^2 \{[s(\omega^2 + s^2)(h+\beta)^2 - \alpha s^2 h(1-m)] + i[\omega(\omega^2 + s^2)(h+\beta)^2 + sha\omega(1-m)]\} / \{h\{(\omega^2 - s^2)(h+\beta)^2 + \alpha sh(1-m)\}^2 + [2s\omega(h+\beta)^2]^2\}\},$$

$$p_2 = \{\alpha sh(1-m)[(\omega^2 - s^2)(h+\beta)^2 + \alpha sh(1-m) - 2is\omega(h+\beta)^2] / \{[(\omega^2 - s^2)(h+\beta)^2 + \alpha sh(1-m)]^2 + [2s\omega(h+\beta)^2]^2\}.$$

求得原系统(1)在正平衡点  $E(x, y)$  处的第一

Lyapunov 系数  $l_1$  为

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \text{Re} [\langle p, C(q, q, q) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, q)) \rangle + \langle p, B(q, (2i\omega E - A)^{-1}B(q, q)) \rangle].$$

**定理 2.2** 在满足定理 2.1 的参数条件下, 若又有  $l_1 = 0$ , 则原系统(1)在正平衡点  $E(x, y)$  处发生余维二的 Bautin 分岔. 当  $l_1 > 0$  时, 发生亚临界的 Hopf 分岔, 得到的极限环为不稳定的; 当  $l_1 < 0$  时, 发生超临界的 Hopf 分岔, 得到的极限环为稳定的.

### 3 数值仿真

当参数取值分别为  $a=2, b=0.6, \alpha=1, \beta=0.6, m=0.5, s=2, h=1$  时, 系统具有稳定的正平衡点(图 1).

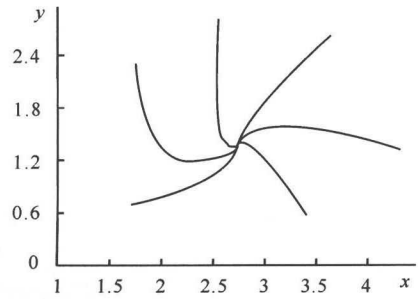


图 1 系统稳定的正平衡点

Fig. 1 Stable positive equilibrium of system

保持参数  $a=1.5, b=0.6, \alpha=2, \beta=0.4, s=2, h=1$  不变, 当  $m$  从 0 变到 1 时, 从图 2 可以看出, 当  $m > 1 - \frac{a(h+\beta)}{\alpha} = -0.05$  时, 食饵种群  $x$  随着  $m$  的增大而增大, 从图 3 可以看出捕食者种群  $y$  在  $m = 1 - \frac{a(h+\beta)}{2\alpha} = 0.475$  处达到极大值.

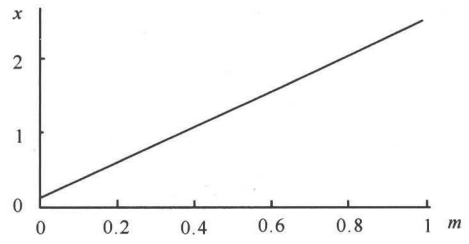


图 2 食饵种群随  $m$  变化

Fig. 2 Prey species trend versus  $m$

在选择参数值分别为  $a=2, b=0.6, \alpha=3, \beta=0.4, s=0.5, h=1$  时, 选择  $m$  作为分岔参数, 根据定理 2.2 可知, 系统(1)在  $m = 1 - \frac{(a+s)(h+\beta)^2}{\alpha(2h+\beta)} = 0.31944$  处发生 Hopf 分岔(图 4). 图 5 所示为参数  $m = 0.3$  时由经过 Hopf 分岔所得到的极限环.

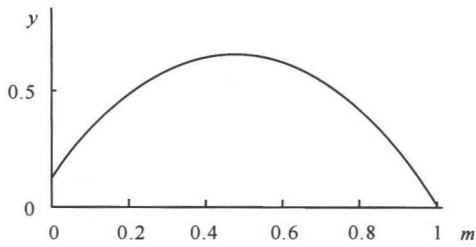


图3 捕食种群随  $m$  变化

Fig. 3 Predator species trend versus  $m$

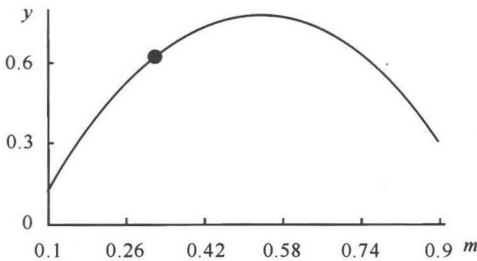


图4 Hopf 分岔

Fig. 4 Hopf bifurcation

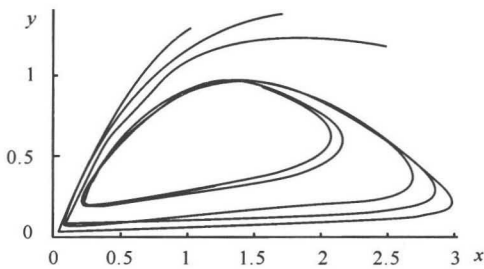


图5 Hopf 分岔后的极限环

Fig. 5 Limit cycle by Hopf bifurcation

在系统(1)的正平衡点  $E(x, y)$  发生 Hopf 分岔的基础上,适当选取参数,使得当第一 Lyapunov 系数  $l_1 = 0$  时,将会发生余维二的 Bautin 分岔,如图 6 所示.其选择  $m, h$  为分岔参数,其余参数值为  $a = 1, b = 0.6, \alpha = 2, \beta = 0.4, s = 0.5$ . 图 6 中两个 GH 点的  $m, h$  参数值分别为  $m = 0.5340, h = 0.5921$  和  $m = 0.5887, h = 0.4336$ ,代入第一 Lyapunov 系数的计算公式,都有  $l_1 = 0$ .

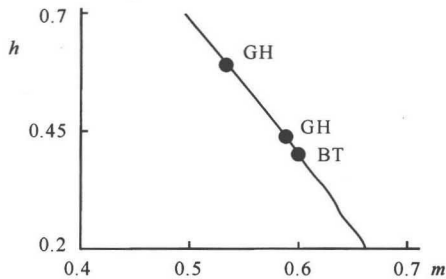


图6 Bautin 分岔

Fig. 6 Bautin bifurcation

响较大的一系列因素,建立了一类改进的 Leslie 型捕食与被捕食系统,应用非线性动力学的理论知识,通过复杂的数学分析、符号推导以及数值计算,对该系统进行动力学分析,得到系统存在稳定正平衡点的参数条件.本文还讨论了系统发生 Hopf 分岔及退化时各自参数应满足的条件,得到相应的定理,最后通过数值仿真验证所得结果的正确性.和以往类似研究相比,首先,本文综合了各类对系统存在较大影响的一系列因素,使其更加贴近实际;其次,本文讨论了系统退化的 Hopf 分岔情形,所得到的存在性条件较现有结果简单、明了.

#### 参考文献:

- [1] 马知恩,周义仓,王稳地,等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社,2004.
- [2] 李群宏,宋自根,朱亮. 具有非线性传染率的传染病模型分析[J]. 云南大学学报:自然科学版,2008,30(5): 437-422.
- [3] Leslie P H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics [J]. Biometrika, 1948, 35(1): 213-245.
- [4] 陈柳娟,孙建华. 具 Holling 第二类功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J]. 生物数学学报,2003, 18(1): 33-36.
- [5] 梁志清. 一类比率依赖捕食与被捕食系统的定性分析, 广西科学院学报,2008, 24(3): 177-180.
- [6] Chen Fengde. On a Leslie-Gower predator-prey model incorporating a prey refuge [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 10: 2905-2908.
- [7] 帅智圣,苗春梅,张伟鹏. 具有庇护所的三种群捕食者-食饵模型[J]. 生物数学学报,2004, 19(1): 65-71.
- [8] Hsu Sze Bi, Hwang Tzv Wei. Hopf bifurcation analysis for a predator-prey system of Holling and Leslie type [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 1999, 3(1): 35-53.
- [9] 梁志清. 离散 Leslie 捕食与被捕食系统周期解的稳定性 [J]. 数学物理学报,2006, 26A(4): 634-640.
- [10] Zhou Xueyong, Cui Jingan, Shi Xiangun. A modified Leslie-Gower predator-prey model with prey infection [J]. JAMC, 2010, 33: 471-487.
- [11] Kuznetsov Y A. Elements of applied bifurcation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

(责任编辑:尹 闯)

#### 4 结束语

本文综合考虑对 Leslie 型捕食与被捕食系统影