二进制中数字之和函数高次均值的计算*

High Power Mean Values Computations of Digital Function Sum

李有成
LI You-cheng

(渭南职业技术学院,陕西渭南 714000)
(Weinan Vocational Technical College,Weinan,Shaanxi,714000,China)

摘要:采用初等方法,通过归纳,猜想得出二进制数字之和函数的高次(t 次)均值的精确计算公式,并给予证明.

关键词:数列 数论函数 均值公式
中图法分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0005-02

Abstract:Element method and supposition were used to obtain a principle,that was used to obtain an exact calculating formula of high power mean values of digital function sum,and the proof was given.

Key words:sequences,number theoretic function,mean value formula

1993 年美国数论专家 F. Smarandche[1] 提出了数字之和函数数列后,文献[2～5]分别给出 $A_r(N)(r\leqslant 5)$ 的精确计算公式.本文主要解决二进制数字之和函数的高次(t 次)均值的计算公式,采用初等方法,通过归纳,猜想得出一个引理,再利用该引理得出 t 次均值的精确计算公式.

1 定义及引理

定义 设 $m=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_s}(k_1>k_2>\cdots\geqslant k_s)$,称 $a(m)=\sum_{i=1}^{s}1$ 为二进制中数字之和函数,称 $A_n(N)=\sum_{m<N}a^n(m)$ 为函数 $a(m)$ 的 n 次均值.

引理 对于任意一个正整数 k 有

$$A_n(2^k)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

证明 (1) 当 $k=1$ 时,左边 $=\sum_{m<2}a^n(1)=1$,右边 $=1$.

(2) 假设 $k=p$ 时,有 $A_n(2^p)=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(p-j)^n$,则当 $k=p+1$ 时,

$$A_n(2^{p+1}) = \sum_{m<2^{p+1}}a^n(m) = \sum_{m<2^p}a^n(m) + \sum_{2^p\leqslant m<2^{p+1}}a^n(m) = A_n(2^p)+\sum_{m<2^p}a^n(m+2^p) = A_n(2^p) + \sum_{m<2^p}(a(m)+1)^n = A_n(2^p) + \sum_{m<2^p}\left(a^n(m)+\binom{n}{1}a^{n-1}(m)+\cdots+\binom{n}{n-1}a(m)+1\right) = A_n(2^p) + A_n(2^p)+\binom{n}{1}A_{n-1}(2^p)+\cdots+\binom{n}{n-1}A_1(2^p)+2^p =$$

$$A_n(2^p)+\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(p-j)^n+\binom{n}{1}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(p-j)^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(p-j)+2^p = A_n(2^p)+$$

$$\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}\left[\binom{n}{0}(p-j)^n+\binom{n}{1}(p-j)^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}(p-j)+1\right]+1 = A_n(2^p)+$$

$$\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}((p-j)+1)^n+1=\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}(p-j)^n+$$

$$\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}((p-j)+1)^n+1=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n+$$

收稿日期:2010-06-01
作者简介:李有成(1965-),男,副教授,主要从事数论研究。
*国家自然科学基金项目(10271093),陕西省教育厅自然科学基金项目(09JK432)资助。

$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}((p-j)+1)^n = p^n + (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}((p-j)+1)^n = p^n + (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\left(\binom{p+1}{j}-\binom{p}{j-1}\right)(p-j)^n + \sum_{j=1}^{p}\left(\binom{p+1}{j}-\binom{p}{j-1}\right)(p+1-j)^n = p^n + (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p-j)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n - \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j-1}(p-j)^n - \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j-1}(p+1-j)^n = (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n + p^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p-j)^n - \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j-1}(p-j)^n - \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j-1}(p+1-j)^n = (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n + p^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n - \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j-1}(p+1-j)^n = (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n + p^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n - p^n - \sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j-1}(p+1-j)^n = (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n + \underline{\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n - \sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j-1}(p+1-j)^n}$.

令划线部分式子为 A,则

$$A = p(p-1)^n + \binom{p}{2}(p-2)^n - p(p-1)^n + \binom{p}{3}(p-3)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p}(p-p)^n - \binom{p}{p-1} = 0.$$

故 $A_n(2^{p+1}) = (p+1)^n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n = \sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}(p+1-j)^n$. 所以,$k$ 对任意自然数都是成立的.

2 主要结论

定理 对于任意正整数 $N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}(k_1 > k_2 > \cdots \geqslant k_s)$,有

$$A_t(N) = \sum_{i=0}^{s-1}\{\sum_{j=0}^{k_{i+1}-1}\binom{k_{i+1}}{j}[((k_{i+1}-j)+i)^t - i^t] + i^t 2^{k_{i+1}}\}.$$

证明 $A_t(N) = \sum_{m<N} a^t(m) = \sum_{m<2^{k_1}} a^t(m) + \sum_{2^{k_1}\leqslant m<2^{k_1}+2^{k_2}} a^t(m) + \cdots + \sum_{N-2^{k_{s-1}}-2^{k_s}\leqslant m<N-2^{k_s}} a^t(m) + \sum_{N-2^{k_s}\leqslant m<N} a^t(m) = \sum_{m<2^{k_1}} a^t(m) + \sum_{m<2^{k_2}}(a(m)+1)^t + \cdots + \sum_{m<2^{k_s}}(a(m)+(s-1))^t = \sum_{i=0}^{s-1}A_t(2^{k_{i+1}}) + \binom{t}{1}\sum_{i=0}^{s-1}iA_{t-1}(2^{k_{i+1}}) + \cdots + \binom{t}{t-1}\sum_{i=0}^{s-1}i^{t-1}A_1(2^{k_{i+1}}) + \sum_{i=0}^{s-1}i^t \cdot 2^{k_{i+1}}$.

根据引理,$A_n(2^k) = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}(k-j)^n$. 令 $n=1,2,\cdots,t-1,t$,得到 $A_1(2^k),A_2(2^k),\cdots,A_t(2^k)$,代入上式,整理得定理成立.

推论 1 对于任意正整数 $N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}(k_1 > k_2 > \cdots \geqslant k_s)$,

$$A_1(N) = \sum_{i=0}^{s-1}(k_{i+1} \cdot 2^{k_{i+1}-1} + i \cdot 2^{k_{i+1}}).$$

推论 2 对于任意正整数 $N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}(k_1 > k_2 > \cdots \geqslant k_s)$,

$$A_2(N) = \sum_{i=0}^{s-1}(k_{i+1}^2 + k_{i+1}(4i+1) + 4i^2) \cdot 2^{k_{i+1}-2}.$$

参考文献:

[1] Smarandche F. Only problems, not solutions! [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993:22.

[2] 李海龙,杨倩丽. 关于 n 进制及其有关计数函数[J]. 纯粹数学与应用数学,2002(1):13-15.

[3] 杨倩丽,李海龙. 关于 n 进制中数字之和函数均值的计算[J]. 西北大学学报,2002(4):361-366..

[4] 杨倩丽. 一个数论函数的三次均值的计算[J]. 纺织学院基础学报,2002(1):10-15.

[5] 李海龙. 一个数论函数的五次均值的计算[J]. 宝鸡文理学院学报,2002(4):256-257.

(责任编辑:尹 闯)