广西科学 Guangxi Sciences 2011,18(1):1～4

算子群与直积分解*

Operator Groups and Direct Product Decomposition

刘 秀[1],郭龙先[1],韦华全[2]

LIU Xiu[1],GUO Long-xian[1],WEI Hua-quan[2]

(1.昭通师范高等专科学校,云南昭通 657000;2.广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023)

(1. Department of Mathematics,Zhaotong Teacher′s College,Zhaotong,Yunnan,657000,China; 2. School of Mathmatical Sciences,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi,530023,China)

摘要:引入广义同态映射的定义,将算子群的算子集进行扩充,得到一些有关算子群的结果,推广了经典的 Schur 定理、Fitting 定理和 Krull-Schmidt 定理等.

关键词:群 算子群 广义同态 反同态 反同构 直积

中图法分类号:O152 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2011)01-0001-04

Abstract:By using the concept of generalized homomorphism,we extent the operator set of operator groups,obtain some results obout operator groups and generalize the classical theory of operator groups,such as the theorems of Schur,Fitting and Krull-Schmidt.

Key words:group,operator group,generalized homomorphism,anti-homomorphism,anti-isomorphism,direct product

在群的经典理论中,算子群(亦称 Ω-群)扮演着重要的角色[1~4].借助算子群的概念,群论中的各种不同的问题能够在统一的形式下进行处理.这里所谓的算子,实际意义是指群的自同态,它包括群的自同态、自同构或内自同构等.基于这样统一的思想,本文中,我们将扩充算子的概念,由此得到若干有关算子群的结果,从而统一推广经典的算子群理论(见文献[3]的第Ⅲ章第二节).

1 定义及引理

定义 1[5] 设 G_1,G_2 是群,映射 $f: G_1\rightarrow G_2$ 叫做 G_1 到 G_2 的广义同态映射,如果 $\forall a,b\in G_1$,等式 $(ab)^f=a^fb^f$ 和 $(ab)^f=b^fa^f$ 至少有一个成立.当 f 为反同态时,可简记为 $G_1\overset{A}{\sim}G_2$.

引理 1[5] 设 f 是群 G_1 到群 G_2 的映射,如果 $\forall a,b\in G_1$,等式 $(ab)^f=a^fb^f$ 和 $(ab)^f=b^fa^f$ 至少有一个成立,则 f 或者是同态映射或者是反同态映射.

引理 2[5] 设 f 是群 G_1 到 G_2 的广义同态映射,则下列结论成立:

(1)$1^f=1,(x^{-1})^f=(x^f)^{-1},\forall x\in G_1$;

(2)$K=\mathrm{Ker}\ f=\{x\in G_1\mid x^f=1\}\lhd G_1,f^*: G_1/K\rightarrow G_2,aK\mapsto f(a)$ 为广义同态单射;

(3)$\forall a,b\in G_1$,等式 $a^fb^f=(ab)^f$ 和 $a^fb^f=(ba)^f$ 至少有一个成立;

(4)$G_1{}^f\leqslant G_2$.

类似地,可以定义广义同构映射、广义自同态映射等.为方便,恒以 $\mathrm{Gnd}(G)$ 表示群 G 的全体广义自同态组成的集合,$\mathrm{Gut}(G)$ 表示 G 的全体广义自同构组成的集合,其他符号和术语都是规范的.容易验证,对于映射的乘法,$\mathrm{Gnd}(G)$ 组成一个有单位元的半群,而 $\mathrm{Gut}(G)$ 组成一个群,称为 G 的广义自同构群.

定义 2 设 G 是群,Ω 是一个集合,对任一 $\alpha\in\Omega$,指定一个群 G 的广义自同态:$g\mapsto g^\alpha,\forall g\in G$,则称 G 为具有算子集 Ω 的算子群,或称 G 为一个 Ω-群.不改变问题的实质,我们还可改换成另一种说法:令 Ω 为 $\mathrm{Gnd}(G)$ 的任一子集,称 (G,Ω) 为 Ω-群.

定义 3 给定两个 Ω-群 G_1,G_2,称广义同态映射 $f: G_1\rightarrow G_2$ 为算子广义同态(或 Ω-广义同态),如果 $g^{\alpha f}=g^{f\alpha},\forall\alpha\in\Omega,g\in G_1$.

收稿日期:2010-12-12

修回日期:2010-12-24

作者简介:刘 秀(1980-),女,助教,硕士,主要从事群论研究。

*国家自然科学基金项目(10961007),云南省高等学校精品课程—《高等代数》项目及广西研究生教育创新计划项目(2007106030701M13)资助。

定义 4　G 的子群 H 叫做 Ω - 子群(可容许的),如果 $H^{\alpha} \leqslant H, \forall \alpha \in \Omega$.

定义 5　称 Ω - 群为不可约的,如果 G 没有非平凡的正规 Ω - 子群.

定义 6　称 Ω - 群 G 为不可分解的,如果 G 不能表成两个非平凡 Ω - 子群的直积.

定义 7　对于无限 Ω - 群 G,合成 Ω - 群列的存在是有条件的.这些条件即所谓无限群的有限性条件.

(1) 关于 Ω - 子群的升链条件:对于由 G 的 Ω - 子群组成的上升群列(升链)

$H_1 \leqslant H_2 \leqslant H_3 \leqslant \cdots$,

总可以找到正整数 κ 使 $H_{\kappa} = H_{\kappa+1} = \cdots$.

(2) 关于 Ω - 子群的降链条件:对于由 G 的 Ω - 子群组成的下降群列(降链)

$G_1 \geqslant G_2 \geqslant G_3 \geqslant \cdots$,

总可以找到正整数 κ 使 $G_{\kappa} = G_{\kappa+1} = \cdots$.

定义 8　称 $\mu \in \mathrm{Gnd}(G)$ 为 G 的正规广义自同态,如果 μ 与 G 的所有内自同构可交换.当 μ 为同态时,就称为正规自同态.

定义 9　称 $\mu \in \mathrm{Gnd}(G)$ 为 Ω - 群 G 的 Ω - 广义自同态,如果 μ 与 Ω 中每个广义自同态可交换.当 μ 为同态时,就称为 Ω - 自同态;当 μ 为同态时,就称为 Ω - 自反同态.

G 的全体 Ω - 自同态的集合记作 $\mathrm{End}_{\Omega}(G)$,G 的全体 Ω - 广义自同态的集合记作 $\mathrm{Gnd}_{\Omega}(G)$.我们以 1 记 G 到自身的恒等映射,而以 0 记 G 的每个元素映到单位元素上的广义自同态.显然,1 和 0 都是 G 的 Ω - 广义自同态.

定义 10[3]　设 G 为群,$\mu, \upsilon \in \mathrm{End}(G)$.称 μ, υ 为可加的,并记 $\mu + \upsilon = \varepsilon$,如果映射 ε 仍为 G 之自同态:

$\varepsilon: g \mapsto g^{\mu} g^{\upsilon}, \forall g \in G$.

定义 11　设 G 为群,μ, υ 为 G 之反同态.称 μ, υ 为可加的,并记 $\mu + \upsilon = \varepsilon$,如果如下定义的映射 ε 仍为 G 之反同态:

$\varepsilon: g \mapsto g^{\mu} g^{\upsilon}, \forall g \in G$.

引理 3　设 μ 为 Ω - 群 G 的正规 Ω - 广义自同构,则 u^{-1} 亦为 G 的正规 Ω - 广义自同构.

证明　对任意的 $\alpha \in \Omega$ 及由 g 诱导的内自同构 $\sigma(g)$,则由定义 8 和定义 9 得 $\mu\alpha = \alpha\mu$ 及 $\mu\sigma(g) = \sigma(g)\mu$.将以上两式左右乘 u^{-1},即得 $\mu^{-1}\alpha = \alpha\mu^{-1}$ 及 $\mu^{-1}\sigma(g) = \sigma(g)\mu^{-1}$.引理 3 成立.

引理 4[3]　设 $\mu, \upsilon \in \mathrm{End}(G)$,则 $\mu, \upsilon \in$ 可加的充要条件为 G^{u} 与 G^{υ} 元素间可交换.

2　主要结果

命题 1　设 μ 是群 G 的正规广义自同态,则 $G^{\mu} \trianglelefteq G$,并且对任意的 $g \in G$ 有 $g^{\mu} g^{-1} \in C_G(G^{\mu})$ 或 $g^{\mu} g \in C_G(G^{\mu})$.

证明　对任意的 $g, h \in G$,以 $\sigma(g)$ 表示由 g 诱导出的 G 内自同构,由 μ 是正规广义自同态,若 μ 为同态,显然 $h^{\mu} \in G^{\mu}$;若 μ 为反同态,由引理 2(4) 也有 $h^{\mu} \in G^{\mu}$.由定义 8 又有 $g^{-1} h^{\mu} g = h^{u\sigma(g)} = h^{\sigma(g)\mu} \in G^{\mu}$,由此即得 $G^{\mu} \trianglelefteq G$.若 μ 为同态,则 $g^{\mu} g^{-1} h^{\mu} (g^{\mu} g^{-1})^{-1} = g^{\mu} h^{\mu\sigma(g)} (g^{-1})^{\mu} = g^{\mu} h^{\sigma(g)\mu} (g^{-1})^{\mu} = (g h^{\sigma(g)} g^{-1})^{\mu} = h^{\mu}$.若 μ 为反同态,由引理 2(1),有 $g^{\mu} g h^{\mu} (g^{\mu} g)^{-1} = g^{\mu} h^{\mu\sigma(g^{-1})} (g^{-1})^{\mu} = g^{\mu} h^{\sigma(g^{-1})\mu} (g^{-1})^{\mu} = (g^{-1} h^{\sigma(g^{-1})} g)^{\mu} = h^{\mu}$.再由 h 的任意性即得结论.

命题 2　设 $\mu \in \mathrm{Gnd}_{\Omega}(G)$,则 G^{μ} 和 $\mathrm{Ker}\mu$ 都是 G 的 Ω - 子群.又若 μ 是正规 Ω - 广义自同态,则 G^{μ} 和 $\mathrm{Ker}\,\mu$ 都是 G 的正规 Ω - 子群.

证明　对任意的 $\alpha \in \Omega$,由定义 9 及引理 2(4) 得 $(G^{\mu})^{\alpha} = G^{\mu\alpha} = G^{\alpha\mu} \leqslant G^{\mu}$,故由定义 4,$G^{\mu}$ 是 G 的 Ω - 子群.又对任意的 $x \in \mathrm{Ker}\,\mu$,有 $x^{\mu} = 1$.由定义 9,$(x^{\alpha})^{\mu} = x^{\mu\alpha} = x^{\mu\alpha} = 1^{\alpha} = 1$,即 $x^{\alpha} \in \mathrm{Ker}\,\mu$.这说明 $\mathrm{Ker}\,\mu$ 是 G 的 Ω - 子群.若 μ 为同态,易知 $\mathrm{Ker}\,\mu \trianglelefteq G$;若 μ 为反同态,由引理 2(2),也有 $\mathrm{Ker}\,\mu \trianglelefteq G$.那么,若 μ 是正规广义自同态,由命题 1,$G^{\mu} \trianglelefteq G$.命题成立.

定理 1　设 G 是不可约 Ω - 群,μ 是 G 的正规 Ω - 广义自同态.若 $\mu \neq 0$,则 μ 是 G 的正规 Ω - 广义自同构,并且 μ^{-1} 亦然.

证明　一方面,因为 μ 是 G 的正规 Ω - 广义自同态,由命题 2,G^{μ} 是 G 的正规 Ω - 子群.再由 G 的不可约性及 $\mu \neq 0$ 得 $G^{\mu} = G$.另一方面,$\mathrm{Ker}\mu$ 也是 G 的正规 Ω - 子群,再由 $\mu \neq 0$,得 $\mathrm{Ker}\mu \neq G$,于是 $\mathrm{Ker}\mu = 1$.这样 μ 是 G 到自身上的一一映射,即 μ 是 G 广义自同构.因为 μ 是 G 的广义自同构,当然 μ^{-1} 亦然.由引理 3,μ^{-1} 是 G 的正规 Ω - 广义自同构.定理 1 成立.

定理 2　设 G 是 Ω - 群,满足关于正规 Ω - 子群的两个链条件,如果 μ 是正规 Ω - 广义自同态,则对充分大的正整数 κ 有 $G = G^{\mu^{\kappa}} \times \mathrm{Ker}\,\mu^{\kappa}$.

证明　容易看出,对任意的正整数 m,μ^{m} 也是 G 的正规 Ω - 广义自同态.由命题 2,$G^{\mu^{m}} \trianglelefteq G$ 及 $\mathrm{Ker}\,\mu^{m} \trianglelefteq G$.考虑正规 Ω - 群列:$G \geqslant G^{\mu} \geqslant G^{\mu^{2}} \geqslant \cdots$,根据降链条件,存在正整数 m 使 $G^{\mu^{m}} = G^{\mu^{m+1}} = \cdots$.

再考虑正规 Ω - 群列:$1 \leqslant \mathrm{Ker}\mu \leqslant \mathrm{Ker}\mu^{2} \leqslant \cdots$,根据升链条件,存在正整数 n 使 $\mathrm{Ker}\,\mu^{n} = \mathrm{Ker}\,\mu^{n+1} = \cdots$.取 $\kappa = \max(m, n)$,则有 $\mathrm{Ker}\,\mu^{\kappa} = \mathrm{Ker} u^{\kappa+1} = \cdots$ 和 $G^{\mu^{\kappa}} = G^{\mu^{\kappa+1}} = \cdots$.

再证明这时必有 $G = G^{\mu^{\kappa}} \times \mathrm{Ker}\,\mu^{\kappa}$.

由于 $G^{\mu^{\kappa}}$ 和 $\mathrm{Ker}\,\mu^{\kappa}$ 都是 G 的正规 Ω - 子群,为完

成证明只须证 $G^{\mu^\kappa}\cap \mathrm{Ker}\,\mu^\kappa=1$ 和 $G=G^{\mu^\kappa}\cdot \mathrm{Ker}\,\mu^\kappa$. 设 $g\in G^{\mu^\kappa}\cap \mathrm{Ker}\,\mu^\kappa$,则有 $g^{\mu^\kappa}=1$,并且存在 $h\in G$ 使 $h^{\mu^\kappa}=g$. 于是 $h^{\mu^{2\kappa}}=1$. 这样 $h\in \mathrm{Ker}\,\mu^{2\kappa}=\mathrm{Ker}\,\mu^\kappa$,由此又得 $h^{\mu^\kappa}=1$,即 $g=1$. 这证明 $G^{\mu^\kappa}\cap \mathrm{Ker}\,\mu^\kappa=1$. 再设 $g\in G$,则 $g^{\mu^\kappa}\in G^{\mu^\kappa}=G^{\mu^{2\kappa}}$. 于是存在 $g\in G$ 使 $g^{\mu^\kappa}=h^{\mu^{2\kappa}}=(h^{\mu^\kappa})^{\mu^\kappa}$,这时有 $g^{\mu^\kappa}(h^{-\mu^\kappa})^{\mu^\kappa}=1$. 当 μ^κ 为同态时,$(gh^{-\mu^\kappa})^{\mu^\kappa}=1$,所以 $gh^{-\mu^\kappa}\in \mathrm{Ker}\mu^\kappa$,进一步有 $g=(gh^{-\mu^\kappa})\cdot h^{\mu^\kappa}\in \mathrm{Ker}u^\kappa\cdot G^{\mu^\kappa}=G^{\mu^\kappa}\cdot \mathrm{Ker}\mu^\kappa$. 当 μ^κ 为反同态时,$(h^{-\mu^\kappa}g)^{\mu^\kappa}=1$,所以 $h^{-\mu^\kappa}g\in \mathrm{Ker}\mu^\kappa$,进而有 $g=h^{\mu^\kappa}(h^{-\mu^\kappa}g)\in G^{\mu^\kappa}\cdot \mathrm{Ker}\mu^\kappa$. 定理 2 成立.

推论 1 设 G 是不可分解 Ω-群,满足关于正规 Ω-子群的两个链条件. 若 μ 是 G 的正规 Ω-广义自同态,则或者 μ 为广义自同构,或者 $\mu^\kappa=0$,对某正整数 κ 成立.

证明 由定理 2,对某正整数 κ 有 $G=G^{\mu^\kappa}\times \mathrm{Ker}\mu^\kappa$,因为 G 不可分解,或者 $G^{\mu^\kappa}=1$,或者 $\mathrm{Ker}\mu^\kappa=1$. 这就推出或者 $\mu^\kappa=0$,或者 $\mathrm{Ker}\mu=1$. 如果出现后者,又有 $G^{\mu^\kappa}=G$,于是 $G^\mu=G$,即 μ 是广义自同构.

推论 2 若 G 为 Ω-群,$\mu,\upsilon\in \mathrm{End}_\Omega(G)$,且 μ,υ 可加,则 $\mu+\upsilon\in \mathrm{End}_\Omega(G)$. 又若 μ,υ 为正规 Ω-自同态,则 $\mu+\upsilon$ 亦为正规 Ω-自同态.

证明 对任意的 $g\in G,\alpha\in\Omega$,由定义 9,$\mu\alpha=\alpha\mu,\upsilon\alpha=\alpha\upsilon$. 若 α 为同态,则 $g^{(\mu+\upsilon)\alpha}=(g^\mu g^\upsilon)^\alpha=g^{\mu\alpha}g^{\upsilon\alpha}=g^{\alpha\mu}g^{\alpha\upsilon}=g^{\alpha(\mu+\upsilon)}$. 若 α 为反同态,由引理 4,$g^{(\mu+\upsilon)\alpha}=(g^\mu g^\upsilon)^\alpha=(g^\upsilon g^\mu)^\alpha=g^{\mu\alpha}g^{\upsilon\alpha}=g^{\alpha\mu}g^{\alpha\upsilon}=g^{\alpha(\mu+\upsilon)}$. 所以 $\alpha(\mu+\upsilon)=(\mu+\upsilon)\alpha$,从而 $\mu+\upsilon\in \mathrm{End}_\Omega(G)$. 以 $\sigma(g)$ 表由 g 诱导出的 G 的内自同构. 由定义 8,$\mu\sigma(g)=\sigma(g)\mu$,$\upsilon\sigma(g)=\sigma(g)\upsilon$,所以 $g^{(\mu+\upsilon)\sigma(g)}=(g^\mu g^\upsilon)^{\sigma(g)}=g^{\mu\sigma(g)}g^{\upsilon\sigma(g)}=g^{\sigma(g)\mu}g^{\sigma(g)\upsilon}=g^{\sigma(g)(\mu+\upsilon)}$,即 $\sigma(g)(\mu+\upsilon)=(\mu+\upsilon)\sigma(g)$,于是 $\mu+\upsilon$ 亦为正规 Ω-自同态.

命题 3 设 $\mu,\upsilon\in$ 为 G 的反同态,则 μ,υ 可加的充要条件为 G^μ 与 G^υ 元素间可交换.

证明 μ,υ 可加 $\Leftrightarrow \varepsilon=\mu+\upsilon$ 是 G 的反同态 $\Leftrightarrow (gh)^{\mu+\upsilon}=h^{\mu+\upsilon}g^{\mu+\upsilon}\Leftrightarrow (gh)^\mu(gh)^\upsilon=h^\mu h^\upsilon g^\mu g^\upsilon\Leftrightarrow h^\mu g^\mu h^\upsilon g^\upsilon=h^\mu h^\upsilon g^\mu g^\upsilon\Leftrightarrow g^\mu h^\upsilon=h^\upsilon g^\mu,\forall g,h\in G$.

推论 3 若 G 为 Ω-群,$\mu,\upsilon\in$ 为 Ω-自反同态,且 μ,υ 可加,则 $\mu+\upsilon$ 为 Ω-自反同态. 又若 μ,υ 为正规 Ω-自反同态,则 $\mu+\upsilon$ 亦为正规 Ω-自反同态.

命题 4 设 G 是不可分解 Ω-群,满足关于正规 Ω-子群的两个链条件.

若 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\in \mathrm{End}(G)$ 是 G 的两两可加的正规 Ω-自同态,且 $\varepsilon=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s$ 是 G 的自同构,则存在一个 $\mu_i,1\leqslant i\leqslant s$,是 G 的自同构.

证明 只证明 $s=2$ 的情况,对于 $s>3$,用归纳法易得到. 现在设 $\mu,\upsilon\in \mathrm{End}(G)$ 是 G 的可加的正规 Ω-自同态. 令 $\mu'=\mu\varepsilon^{-1},\upsilon'=\upsilon\varepsilon^{-1}$. 因为 μ,υ 可加,由引理 4,对 $\forall g,h\in G$ 有 $h^\mu g^\upsilon=g^\upsilon h^\mu$,用 ε^{-1} 作用于上式两端,得到 $h^{\mu'}g^{\upsilon'}=g^{\upsilon'}h^{\mu'}$,即 μ',υ' 亦可加. 对任意的 $g\in G,\alpha\in\Omega$,设 $\sigma(g)$ 为 G 的内自同构. 由推论 2,ε 为正规 Ω-自同构,又由引理 3,ε^{-1} 亦为正规 Ω-自同构. 所以 $\mu'\sigma(g)=\mu\varepsilon^{-1}\sigma(g)=\mu\sigma(g)\varepsilon^{-1}=\sigma(g)\mu\varepsilon^{-1}=\sigma(g)\mu'$,$\mu'\alpha=\mu\varepsilon^{-1}\alpha=\mu\alpha\varepsilon^{-1}=\alpha\mu\varepsilon^{-1}=\alpha\mu'$,从而 μ' 为 Ω-自同态. 类似可证,υ' 为 Ω-自同态. 且 $g^{(\mu'+\upsilon')}=g^{\mu'}g^{\upsilon'}=g^{\mu\varepsilon^{-1}}g^{\upsilon\varepsilon^{-1}}=(g^\mu g^\upsilon)^{\varepsilon^{-1}}=(g^\varepsilon)^{\varepsilon^{-1}}=g$,即满足 $\mu'+\upsilon'=1$. 于是有 $\mu'\upsilon'=\mu'(1-\mu')=(1-\mu')\mu'=\upsilon'\mu'$,其中 $1-\mu'$ 规定为 $g^{1-\mu'}=g(g^{-1})^{\mu'}=g(g^{\mu'})^{-1},\forall g\in G$. 假定 μ',υ' 都不是 G 的自同构,由推论 1,对充分大的正整数 κ 有 $\mu'^\kappa=0,\upsilon'^\kappa=0$. 于是 $1=(\mu'+\upsilon')^{2\kappa}=\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\mu'^{2k-j}\upsilon'^j=0$ 矛盾. 故 μ',υ' 中至少有一个,譬如 μ' 是自同构,于是 $\mu=\mu'\varepsilon$ 也是 G 的自同构.

命题 5 设 G 是不可分解 Ω-群,满足关于正规 Ω-子群的两个链条件. 若 G 的反同态 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 是 G 的两两可加的正规 Ω-自反同态,且 $\varepsilon=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s$ 是 G 的反同构,则存在一个 $\mu_i,1\leqslant i\leqslant s$,是 G 的反同构.

证明 只证明 $s=2$ 的情况,对于 $s>3$ 用归纳法易得到. 现在设 μ,υ 是 G 的可加的正规 Ω-自反同态. 令 $\mu'=\mu\varepsilon^{-1},\upsilon'=\upsilon\varepsilon^{-1}$. 因为 μ,υ 可加,由命题 3,对 $\forall g,h\in G,h^\mu g^\upsilon=g^\upsilon h^\mu$,用 ε^{-1} 作用于上式两端,得到 $g^{\upsilon'}h^{\mu'}=h^{\mu'}g^{\upsilon'}$,即 μ',υ' 亦可加. 容易验证 $\mu',\upsilon'\in \mathrm{End}(G)$. 对任意的 $g\in G,\alpha\in\Omega$,设 $\sigma(g)$ 为 G 的内自同构. 由推论 3,ε 为正规 Ω-自反同构,又由引理 3,ε^{-1} 亦为正规 Ω-自反同构. 所以 $\mu'\sigma(g)=\mu\varepsilon^{-1}\sigma(g)=\mu\sigma(g)\varepsilon^{-1}=\sigma(g)\mu\varepsilon^{-1}=\sigma(g)\mu'$,$\mu'\alpha=\mu\varepsilon^{-1}\alpha=\mu\alpha\varepsilon^{-1}=\alpha\mu\varepsilon^{-1}=\alpha\mu'$,从而 μ' 为 Ω-自同态. 类似可证,υ' 为 Ω-自同态. 且由命题 3,$g^{(\mu'+\upsilon')}=g^{\mu'}g^{\upsilon'}=g^{\mu\varepsilon^{-1}}g^{\upsilon\varepsilon^{-1}}=(g^\upsilon g^\mu)^{\varepsilon^{-1}}=(g^\mu g^\upsilon)^{\varepsilon^{-1}}=(g^\varepsilon)^{\varepsilon^{-1}}=g$,即满足 $\mu'+\upsilon'=1$. 于是有 $\mu'\upsilon'=\mu'(1-\mu')=(1-\mu')\mu'=\upsilon'\mu'$,其中 $1-\mu'$ 规定为 $g^{1-\mu'}=g(g^{-1})^{\mu'}=g(g^{\mu'})^{-1},\forall g\in G$. 假定 μ',υ' 都不是 G 的自同构,由推论 1,对充分大的正整数 κ 有 $\mu'^\kappa=0,\upsilon'^\kappa=0$. 于是 $1=(\mu'+\upsilon')^{2\kappa}=$

$$\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\mu'^{2k-j}\upsilon'^j=0$$ 矛盾. 故 μ',υ' 中至少有一个,譬如 μ' 是自同构,于是 $\mu=\mu'\varepsilon$ 也是 G 的反同构.

定理 3 设 G 是 Ω-群,$G_1,\cdots,G_n$ 是 G 的 Ω-子群,并且 $G=G_1\times\cdots\times G_n$. 对于每个 $i=1,2,\cdots,n$,如下定义 G 的射影 π_i:若 $g=g_1\cdots g_n$,其中 $g_1\in G_1,\cdots,g_n\in G_n$,则规定 $g^{\pi_i}=g_i$. 有 $\pi_i\in \mathrm{End}_\Omega(G),i=1,2,\cdots,n$,是 G 的两两可加的正规 Ω-自同态,并且 $\pi_1+\cdots+\pi_n=1$;$\pi_i{}^2=\pi_i,i=1,2,\cdots,n$;$\pi_i\pi_j=0,j=1,2,\cdots,$

$n, i \neq j$.

证明 设 $g=g_1\cdots g_n$，$h=h_1\cdots h_n$，其中 $g_i, h_i \in G_i$，$i=1,\cdots,n$. 则 $gh=g_1\cdots g_nh_1\cdots h_n=g_1h_1\cdots g_nh_n$. 所以 $(gh)^{\pi_i}=g_ih_i=g^{\pi_i}h^{\pi_i}$，即 π_i 是自同态. 又设 $\alpha \in \Omega$，因 $G_i{}^{\alpha} \leqslant G_i$，有 $G^{\alpha\pi_i}=(G^{\alpha})^{\pi_i}=(G_1^{\alpha}\cdots G_n^{\alpha})^{\pi_i}=G_i{}^{\alpha}=G^{\pi_i\alpha}$，故 $\pi_i \in \mathrm{End}_{\Omega}(G)$.

又对 $i \neq j$，$G^{\pi_i}=G_i$ 和 $G^{\pi_j}=G_j$ 元素间可交换，由引理 4 得 π_i, π_j 可加. 而 $g^{\pi_1+\cdots+\pi_n}=g^{\pi_1}\cdots g^{\pi_n}=g_1\cdots g_n=g$，$g^{\pi_i{}^2}=(g^{\pi_i})^{\pi_i}=(g_i)^{\pi_i}=g_i=g^{\pi_i}$，$g^{\pi_i\pi_j}=(g_i)^{\pi_j}=1$. 等式 $\pi_1+\cdots+\pi_n=1$，$\pi_i{}^2=\pi_i$，$\pi_i\pi_j=0(i \neq j)$ 成立.

定理 4 G 是 Ω - 群，$G_1,\cdots,G_n$ 是 G 的 Ω - 子群，并且 $G=G_1\times\cdots\times G_n$. 对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，如下定义 G 的逆射影 π_i：若 $g=g_1\cdots g_n$，其中 $g_1 \in G_1,\cdots,g_n \in G_n$，则规定 $g^{\pi_i}=g_i{}^{-1}$. 那么有 π_i，$i=1,2,\cdots,n$，是 G 的两两可加的正规 Ω - 自反同态.

证明 设 $g=g_1\cdots g_n$，$h=h_1\cdots h_n$，其中 $g_i, h_i \in G_i$，$i=1,\cdots,n$. 则 $gh=g_1\cdots g_nh_1\cdots h_n=g_1h_1\cdots g_nh_n$. 所以 $(gh)^{\pi_i}=(g_ih_i)^{-1}=h_i{}^{-1}g_i{}^{-1}=h^{\pi_i}g^{\pi_i}$，即 π_i 是反同态. 又设 $\alpha \in \Omega$，因 $G_i{}^{\alpha} \leqslant G_i$，有 $G^{\alpha\pi_i}=(G^{\alpha})^{\pi_i}=(G_1^{\alpha}\cdots G_n^{\alpha})^{\pi_i}=(G_i{}^{\alpha})^{-1}=(G_i{}^{-1})^{\alpha}=G^{\pi_i\alpha}$，故 π_i 为 Ω - 自反同态. 又对 $i \neq j$，$G^{\pi_i}=G_i$ 和 $G^{\pi_j}=G_j$ 元素间可交换，由命题 3 得 π_i, π_j 可加.

因为在直积分解式中出现的子群皆为正规子群，故以下可假定 Ω 包含 G 的全部内自同构. 这样 Ω - 子群就都是正规子群，Ω - 广义自同态也都是正规广义同态.

定理 5 设 G, H 是 Ω - 群. 如果 π 是 G 到 H 的 Ω - 广义同态，μ 是 H 到 G 的 Ω - 广义同态，且 $\pi\mu$ 是 G 的广义自同构，则 $H=G^{\pi}\times \mathrm{Ker}\,\mu$.

证明 由于 G^{π} 和 $\mathrm{Ker}\,\mu$ 都是 H 的 Ω - 子群，且当假定 Ω 包含 H 的全部内自同构，它们也都是 H 的正规子群. 因此为完成证明只须证 $G^{\pi}\cap \mathrm{Ker}\,\mu=1$ 和 $H=G^{\pi}\cdot \mathrm{Ker}\,\mu$.

设 $h \in G^{\pi}\cap \mathrm{Ker}\mu$. 则对某个 $g \in G$，有 $h=g^{\pi}$，同时又有 $h^{\mu}=g^{\pi\mu}=1$. 因为 $\pi\mu$ 是 G 的广义自同构，得 $g=1$，于是 $h=1$. 这证明了 $G^{\pi}\cap \mathrm{Ker}\mu=1$.

又对任一 $h \in H$，有 $h^{\mu} \in G$. 因 $\pi\mu$ 是 G 的广义自同构，存在 $g \in G$ 使 $g^{\pi\mu}=h^{\mu}$，故当 μ 为同构时，$(hg^{-\pi})^{\mu}=1$，即 $hg^{-\pi} \in \mathrm{Ker}\mu$. 于是由 $h=(hg^{-\pi})\cdot g^{\pi} \in \mathrm{Ker}\mu\cdot G^{\pi}$，得 $H=G^{\pi}\cdot \mathrm{Ker}\mu$.

当 μ 为反同构时，$(g^{-\pi}h)^{\mu}=1$，即 $g^{-\pi}h \in \mathrm{Ker}\mu$. 于是 $h=g^{\pi}\cdot(g^{-\pi}h) \in G^{\pi}\cdot \mathrm{Ker}\mu$. 也得 $H=G^{\pi}\cdot \mathrm{Ker}\mu$. 其他证明类似.

定理 6 设 G 是有限 Ω - 群，则 G 可分解为有限个不可分解的 Ω - 子群的直积 $G=G_1\times\cdots\times G_r$. 又若 $G=H_1\times\cdots\times H_s$ 也是 G 的不可分解 Ω - 子群的直积分解式，则有 $r=s$，并且对诸 H_i 适当编序后有 Ω - 同构 $G_i \cong H_i$，$i=1,\cdots,r$.

证明 因为 G 是有限群，可分解性是显然的. 故只须证唯一性. 对 r 用归纳法. 当 $r=1$，这时 G 不可分解，结论显然成立. 下面设 $r>1$. 假定 $\pi_1,\cdots,\pi_r$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_s$ 是对应于二分解式的射影，有

$$1=\pi_1+\cdots+\pi_r=1=\mu_1+\cdots+\mu_s.$$

由此推出

$$\pi_1=(\mu_1+\cdots+\mu_s)\pi_1=\mu_1\pi_1+\cdots+\mu_s\pi_1.$$

把上述映射限制在 G_1 上，因 π_1 是 G_1 的自同构，由命题 4，$\mu_1\pi_1,\cdots,\mu_s\pi_1$ 中至少有一个是 G_1 的自同构. 不妨设 $\mu_1\pi_1$ 是 G_1 的自同构. 考虑映射 $G_1 \xrightarrow{\mu_1} H_1 \xrightarrow{\pi_1} G_1$，由定理 5，$H_1=G_1^{\mu_1}\times \mathrm{Ker}\,\pi_1$. 又因 μ_1 必为单射，π_1 为满射，有 $G_1^{\mu_1} \neq 1$，$\mathrm{Ker}\pi_1 \neq H_1$. 根据 H_1 的不可分解性，得 $G_1^{\mu_1}=H_1$，$\mathrm{Ker}\pi_1=1$. 这样 μ_1 是 G_1 到 H_1 的 Ω - 同构，π_1 是 H_1 到 G_1 的 Ω - 同构.

再证明 $\overline{G}=H_1(G_2\times\cdots\times G_r)$ 也是直积，这只要证单位元素 1 的表法唯一. 令 $1=h_1g_2\cdots g_r$，$h_1 \in H_1$，$g_2 \in G_2,\cdots,g_r \in G_r$，以 π_1 作用于上式两端得 $h_1^{\pi_1}=1$，因 π_1 是 H_1 到 G_1 的 Ω - 同构，故得 $h_1=1$. 于是又有 $g_2\cdots g_r=1$，从而得到 $g_2=1,\cdots,g_r=1$. 这样 $\overline{G}=H_1\times G_2\times\cdots\times G_r$. 又因 $\overline{G} \leqslant G$，比较阶即得 $G=H_1\times G_2\times\cdots\times G_r$，于是 $G/H_1 \cong G_2\times\cdots\times G_r$. 又因为 $G=H_1\times\cdots\times H_s$，有 $G/H_1 \cong H_2\times\cdots\times H_s$. 所以 $G_2\times\cdots\times G_r \cong H_2\times\cdots\times H_s$. 设 α 是上述同构中的一个同构映射，则有 $G_2^{\alpha}\times\cdots\times G_r^{\alpha}=H_2\times\cdots\times H_s$. 于是由归纳假设得 $r=s$，并对诸 H_i 适当编序后有 $G_2^{\alpha} \cong H_2,\cdots,G_r^{\alpha} \cong H_r$. 而因 $G_i^{\alpha} \cong G_i$，故得 $G_i \cong H_i$，$i=2,\cdots,r$. 定理 6 证明完毕.

参考文献：

[1] Huppert B. Endliche gruppen Ⅰ[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[2] Robinson D J S. A course in the theory of groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[3] 徐明曜. 有限群导引：上册[M]. 北京：科学出版社，1999.

[4] 张远达. 有限群构造：上册[M]. 北京：科学出版社，1982.

[5] 韦华全，刘秀，杨立英. 广义自同构群与有限群结构[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2008，31(5)：522-525.

（责任编辑：尹　闯）