

湮没算符三次幂本征态的非经典特性*

Non-classical Properties of the Eigenstates of Annihilation Operator a^3

蓝海江^{1,2}

LAN Hai-jiang^{1,2}

(1. 柳州师范高等专科学校物理与信息科学系, 广西柳州 545004; 2. 西南交通大学量子光电实验室, 四川成都 610031)

(1. Department of Physics and Information Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China; 2. Quantum Optoelectronics Laboratory, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan, 610031, China)

摘要:基于量子态的反聚束效应及 Wigner 函数的分布规律, 利用二阶相干度及 Fock 态表象下 Wigner 函数的表示式, 分别计算湮没算符三次幂本征态的二阶相干度及 Wigner 函数, 讨论湮没算符三次幂本征态的非经典特性. 结果表明, 湮没算符三次幂本征态都具有反聚束效应, 并且其 Wigner 函数均出现负值. 这说明湮没算符三次幂本征态都是具有非经典特性的量子态.

关键词:湮没算符 本征态 二阶相干度 反聚束效应 Wigner 函数 非经典特性

中图法分类号:O431.2 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2010)03-0232-03

Abstract: By using the expression of second-order coherence degree and Wigner function in Fock presentation, the second-order coherence degrees and the Wigner functions of the eigenstates of annihilation operator a^3 were calculated. Based on the anti-bunching effect and the distributions of Wigner functions, the non-classical properties of these eigenstates were analyzed. The numerical results show that these eigenstates produce anti-bunching effect, and their relevant Wigner functions can be negative in phase spaces, which indicates that the eigenstates of annihilation operator a^3 are non-classical states.

Key words: annihilation operator, eigenstate, second-order coherence degree, anti-bunching effect, Wigner function, non-classical property

反聚束效应是指光子在时间上呈离散分布的一种非经典现象, 它描述了光场量子态的非经典效应. 反聚束效应可以用二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 来描述, 当 $g^{(2)}(0) < 1$ 时, 表明量子态具有反聚束效应. 自 Kimble 等^[1]首先从实验中观察到光子的反聚束效应以来, 人们先后在原子、分子、离子等物质的发光中观察到光子的反聚束效应^[2~4]. 光场量子态的反聚束效应与量子保密通信密切相关.

Wigner 函数是定义于相空间中的实函数, 它在描述量子态方面与波函数或密度矩阵是等价的, 它同

样包含了量子态的所有信息. Wigner 函数是具有准概率分布性质的函数. 准经典态(如相干态)的 Wigner 函数总是非负的, 而 Wigner 函数取负值则是量子态具有非经典特性的反映. 近年来, 人们提出了许多重构量子态的理论方案, 比如原子偏转技术^[5], 微脉塞方案^[6]等. 在实验方面, 人们也已成功地重构了许多量子态的 Wigner 函数, 比如, Lvovsky 等^[7]重构了单光子 Fock 态的 Wigner 函数, 叶晨光等^[8]重构了真空压缩态光场的 Wigner 函数. 利用 Wigner 函数研究各种新的量子态, 目前仍然是人们研究的热点^[9,10].

本文计算湮没算符三次幂本征态的二阶相干度及 Wigner 函数, 并据此讨论湮没算符三次幂本征态的非经典特性.

收稿日期: 2009-12-07

作者简介: 蓝海江(1963-), 男, 副教授, 主要从事量子光学研究.

* 国家自然科学基金项目(10874142)资助.

1 湮没算符三次幂本征态的二阶相干度及其非经典特性

彭石安等^[11]构造了湮没算符三次幂 a^3 的 3 个正交归一本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ ，并且发现它们都没有压缩效应。这些本征态是

$$|\Psi_0\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{\sqrt{(3n)!}} |3n\rangle, \quad (1)$$

$$|\Psi_1\rangle = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{\sqrt{(3n+1)!}} |3n+1\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi_2\rangle = C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+2}}{\sqrt{(3n+2)!}} |3n+2\rangle, \quad (3)$$

其中，

$$C_0 = \left[\frac{1}{3} \exp(|z|^2) + \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2\right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_1 = \left[\frac{1}{3} \exp(|z|^2) - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2\right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_2 = \left[\frac{1}{3} \exp(|z|^2) - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2\right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

C_0, C_1, C_2 分别是相应本征态的归一化常数(均为实数)。

依据(1)~(3)式,可以计算出 a^3 本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的二阶相干度^[11],结果分别为

$$g_0^{(2)}(0) = \frac{\langle \Psi_0 | a^{+2} a^2 | \Psi_0 \rangle}{(\langle \Psi_0 | a^+ a | \Psi_0 \rangle)^2} = \frac{C_2^4}{C_0^2 C_1^2}, \quad (4)$$

$$g_1^{(2)}(0) = \frac{\langle \Psi_1 | a^{+2} a^2 | \Psi_1 \rangle}{(\langle \Psi_1 | a^+ a | \Psi_1 \rangle)^2} = \frac{C_0^4}{C_1^2 C_2^2}, \quad (5)$$

$$g_2^{(2)}(0) = \frac{\langle \Psi_2 | a^{+2} a^2 | \Psi_2 \rangle}{(\langle \Psi_2 | a^+ a | \Psi_2 \rangle)^2} = \frac{C_1^4}{C_0^2 C_2^2}. \quad (6)$$

利用(4)~(6)式,可以绘出二阶相干度 $g_0^{(2)}(0)$ 、 $g_1^{(2)}(0)$ 及 $g_2^{(2)}(0)$ 随复参数 z 的模 $|z|$ 变化的曲线如图 1 所示。

由图 1 可知:对于本征态 $|\Psi_0\rangle$,当 $3.3893 > |z| > 1.7369$ 时, $g_0^{(2)}(0) < 1$ (其中,极小值 $g_0^{(2)}(0)_{\min} = 0.98706$);对于本征态 $|\Psi_1\rangle$,当 $|z| < 1.3601$ 时, $g_1^{(2)}(0) < 1$;对于本征态 $|\Psi_2\rangle$,当 $|z| < 2.5789$ 时, $g_2^{(2)}(0) < 1$ 。

由于 a^3 的本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的二阶相干度均出现了小于 1 的状况,由此说明, a^3 的本征态都具有反聚束效应。反聚束效应是量子态的非经典效

应之一,因此可以判定, a^3 的本征态都是具有非经典特性的量子态。

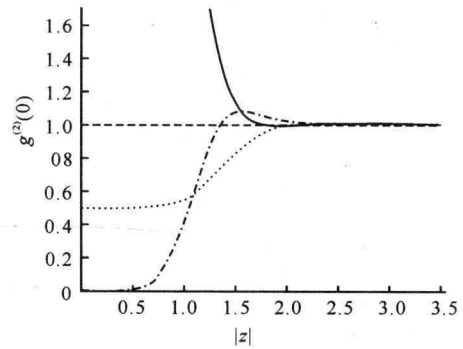


图 1 a^3 本征态二阶相干度的变化曲线
Fig. 1 Curves of the second-order coherence degrees of a^3 eigenstates
—: $g_0^{(2)}(0)$; - - -: $g_1^{(2)}(0)$;: $g_2^{(2)}(0)$.

2 湮没算符三次幂本征态的 Wigner 函数及其非经典特性

Wigner 函数在 Fock 态表象下的表示式^[12]是

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} \sum_{m, n} \rho_{mn} \langle n | \hat{T}(q, p) | m \rangle, \quad (7)$$

(7) 式中, $\langle n | \hat{T}(q, p) | m \rangle = (-1)^n 2^{m-n+1} (q - ip)^{m-n} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \exp(-2r^2) L_n^{m-n}(4r^2)$. 其中, $r^2 = q^2 + p^2$, $L_n^{m-n}(x) = \sum_{\rho=0}^n (-1)^\rho \frac{m!}{(m-n+\rho)!(n-\rho)! \rho!} x^\rho$, 为关联 Laguerre 多项式。

由(1)~(3)式,可以计算出 a^3 本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的密度矩阵分别为

$$\hat{\rho}_0 = C_0^2 \sum_{m, n} \frac{(z^*)^{3n} z^{3m}}{\sqrt{(3m)!(3n)!}} |3m\rangle \langle 3n|, \quad (8)$$

$$\hat{\rho}_1 = C_1^2 \sum_{m, n} \frac{(z^*)^{3n+1} z^{3m+1}}{\sqrt{(3m+1)!(3n+1)!}} |3m+1\rangle \langle 3n+1|, \quad (9)$$

$$\hat{\rho}_2 = C_2^2 \sum_{m, n} \frac{(z^*)^{3n+2} z^{3m+2}}{\sqrt{(3m+2)!(3n+2)!}} |3m+2\rangle \langle 3n+2|. \quad (10)$$

由(7)~(10)式,可以计算出 a^3 本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的 Wigner 函数,结果分别为

$$W_0(r) = \{6 \exp(-2r^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2(3n)}}{(3n)!} (-1)^{3n} L_{3n}(4r^2)\} / \{\pi [\exp(|z|^2) + 2 \exp(-\frac{1}{2}|z|^2) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2)]\}, \quad (11)$$

$$W_1(r) = \{6 \exp(-2r^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2(3n+1)}}{(3n+1)!} (-1)^{3n+1} L_{3n+1}(4r^2)\} / \{\pi [\exp(|z|^2) -$$

$$\exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2) + \sqrt{3}\exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2)\}, \quad (12)$$

$$W_2(r) = \{6\exp(-2r^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2(3n+2)}}{(3n+2)!} (-1)^{3n+2} L_{3n+2}(4r^2)\} / \{\pi[\exp(|z|^2) - \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2) - \sqrt{3}\exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^2)]\}. \quad (13)$$

依据(11)~(13)式,可以分析 a^3 本征态在相空间中的准概率分布及其非经典特性.不失一般性,取 $|z|=0.5$ 、 $|z|=1.5$ 及 $|z|=2.5$ 作图分析.由(11)~(13)式,可以绘出 a^3 本征态的Wigner函数随变量 r 变化的分布图如图2所示.

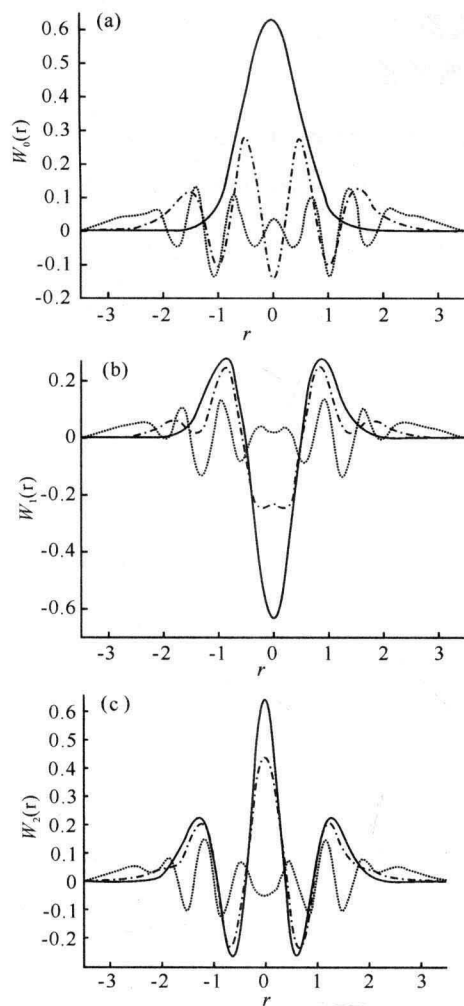


图2 a^3 本征态的Wigner函数在相空间中的分布
Fig. 2 Distributions of the Wigner functions of a^3 eigenstates in phase spaces

(a) $|\Psi_0\rangle$; (b) $|\Psi_1\rangle$; (c) $|\Psi_2\rangle$.

—: $|z|=0.5$; - - -: $|z|=1.5$; ····: $|z|=2.5$.

由图2(a)可知,当 $|z|$ 较小时,本征态 $|\Psi_0\rangle$ 的Wigner函数大于或等于零,而当 $|z|$ 较大时,其Wigner函数值在零附近振荡,函数有负峰值.由图

2(b)、图2(c)可知,无论 $|z|$ 取何值,本征态 $|\Psi_1\rangle$ 、 $|\Psi_2\rangle$ 的Wigner函数都在零附近振荡,函数有负峰值;当 $|z|$ 较小时,本征态 $|\Psi_1\rangle$ 的Wigner函数的负峰值大于本征态 $|\Psi_2\rangle$ 的负峰值.此外,随着 $|z|$ 的增大,本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的Wigner函数的振荡频率增大而振幅减小.

由于 a^3 的本征态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 及 $|\Psi_2\rangle$ 的Wigner函数均出现了负峰值,而Wigner函数取负值是量子态具有非经典特性的反映,因此,同样可以判定, a^3 的本征态都是具有非经典特性的量子态.

3 结论

本文从量子态的反聚束效应及Wigner函数的分布规律两个方面,分析了湮没算符三次幂 a^3 的3个正交归一本征态 $|\Psi_1\rangle$ 、 $|\Psi_0\rangle$ 与 $|\Psi_2\rangle$ 的非经典特征,结果表明, a^3 的3个正交归一本征态都是具有非经典特性的量子态.

参考文献:

- [1] Kimble H J, Dagenais M, Mandel L. Photon antibunching in resonance fluorescence [J]. Phys Rev Lett, 1977, 39 (11): 691-695.
- [2] Diedrich F, Walther H. Nonclassical radiation of a single stored ion [J]. Phys Rev Lett, 1987, 58(3): 203-206.
- [3] Lounis B, Moerner W E. Single photons on demand from a single molecule at room temperature [J]. Nature, 2000, 407(9): 491-493.
- [4] Santori C, Pelton M, Solomon G, et al. Triggered single photons from a quantum dot [J]. Phys Rev Lett, 2001, 86 (8): 1502-1505.
- [5] Franca Santos M, Solano E, Matos Filho R L. Conditional large Fock state preparation and field state reconstruction in cavity QED [J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(9): 093601.
- [6] 张智明. 利用微脉塞重构腔场的Wigner函数 [J]. 物理学报, 2004, 53(1): 70-74.
- [7] Lvovsky A I, Hansen H, Aichele T, et al. Quantum state reconstruction of the single-photon Fock state [J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(5): 050402.
- [8] 叶晨光, 张靖. 利用PPKTP晶体产生真空压缩态及其Wigner准概率分布函数的量子重构 [J]. 物理学报, 2008, 57(11): 6962-6967.
- [9] Piovella N, Cola M M, Volpe L, et al. Three-dimensional Wigner-function description of the quantum free-electron laser [J]. Phys Rev Lett, 2008, 100(4): 044801.
- [10] Gonzalez N, Molina-Terriza G, Torres J P. Properties of the spatial Wigner function of entangled photon pairs [J]. Phys Rev A, 2009, 80(4): 043804.
- [11] 彭石安, 郭光灿. 光子消灭算符高次幂的本征态及其性质 [J]. 物理学报, 1990, 39(1): 51-60.
- [12] Tana R, Miranowicz A, Gantsog T. Quantum phase properties of nonlinear optical phenomena [J]. Progress in Optics, 1996, 35(6): 355-446.

(责任编辑: 韦廷宗)