优化权重下 ρ-混合序列部分和的几乎处处中心极限定理*

Almost Sure Central Limit Theorem for the Partial Sums under ρ-mixing Sequences with Optimized Weight

简　默,吴群英,彭先豪

JIAN Mo,WU Qun-ying,PENG Xian-hao

(桂林理工大学理学院,广西桂林　541004)

(College of Science,Guilin University of Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:将已有的 ρ-混合序列部分和的几乎处处中心极限定理权重由 $d_k=\frac{1}{k}$ 推广到 $d_k=\frac{\log^{\alpha}k}{k}(\alpha\geqslant -1)$,得到优化权重下部分和的几乎处处中心极限定理.

关键词:ρ-混合序列　几乎处处中心极限定理　权重

中图法分类号:O211.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)03-0200-02

Abstract:On the basis of the pre-exsiting almost sure central limit theorem for the partial sums under ρ- mixing ,we generalized the weight $d_k=\frac{1}{k}$ to $d_k=\frac{\log^{\alpha}k}{k}(\alpha\geqslant -1)$,and concluded the corresponding theorem with optimized weight.

Key words:ρ-mixing sequences,almost sure central limit theorem,weight

几乎处处中心极限定理是概率论研究的一个热门话题,文献[1,2]最早开始研究.文献[3]给出了针对独立同分布(i.i.d.)的随机变量列几乎处处中心极限定理:设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 i.i.d 随机变量列,$EX=0$,$EX^2=1$,则 $\forall\ x$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{\frac{S_k}{\sqrt{k}}\leqslant x\}=\Phi(x)\ \text{a.s.}. \quad (1)$$

这里 $I\{\cdot\}$ 为示性函数,$\Phi(x)$ 为标准正态函数.文献[4]针对平稳强混合随机变量列,平稳 ρ-混合随机变量列及平稳 PA 随机变量列,证明了(1)式成立.

对于独立同分布的几乎处处中心极限定理,前人已做了很多的研究,已经将(1)式中的权重 $\frac{1}{k}$ 推广到 $\frac{\log^{\alpha}k}{k}$,$\frac{e^{\log^{\alpha}k}}{k}$,但是在 ρ-混合序列中,对于权重 $\frac{1}{k}$ 还未进行推广.本文主要是针对 ρ-混合序列,讨论权重由 $\frac{1}{k}$ 改进为 $\frac{\log^{\alpha}k}{k}(\alpha\geqslant -1)$ 时部分和的几乎处处中心极限定理.

以下 $\forall\ x\in C_G$ 表示 x 是函数 G 的连续点,C 表示正常数,在不同的地方可取不同的值.

1　定义及引理

定义 1[5]　称 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 ρ-混合序列,如果当 $n\to\infty$ 时,$\rho(n)=\sup\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{X\in L^2(F_1^k),Y\in L^2(F_{k+n}^{\infty})}\frac{|\mathrm{cov}(X,Y)|}{\|X\|_2\|Y\|_2}\to 0$,其中 F_n^m 是由随机变量 $X_n,X_{n+1},\cdots,X_m$ 产生的 σ-域,$\|X\|_p=(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$.

引理 1[6]　设 $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ 为有界的随机变量序列,$\{d_k\}_{k\geqslant 1}$ 为正的数列,$D_n=\sum\limits_{k=1}^{n}d_k$,$T_n=\frac{1}{D_n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_k\xi_k$,假设 $n\to\infty$ 时,$D_n\to\infty$,$\frac{D_{n+1}}{D_n}\to 1$.对于 $\varepsilon>0$,常数 C 和所有的 n 满足 $ET_n^2\leqslant C(\log D_n)^{-1}(\log\log D_n)^{-2}$,则 $T_n\to 0$ a.s.,当 $n\to\infty$.

引理 2[7] 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 ρ-混合序列,$X\in L_p(F_{-\infty}^k)$ 且 $Y\in L_p(F_{k+n}^{\infty})$,$p,q\geqslant 1$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,那么 $|EXY-EXEY|\leqslant 4\rho(n)^{\frac{2}{p}\wedge(\frac{2}{q})}\|X\|_p\|Y\|_q$,其中 $\|X\|_p=(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$.

收稿日期:2009-12-29

修回日期:2010-04-06

作者简介:简　默(1978-),男,硕士研究生,主要从事概率极限理论和数理统计研究。

* 国家自然科学基金项目(10661006);广西研究生教育创新计划项目(2009105960202M29)资助。

2 主要结果

定理 1 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是ρ-混合序列，$EX_i=0$且数列$a_n>0$，满足$ES_n^2\leqslant a_n^2$，对$n\geqslant k$，有$\frac{a_n}{a_k}\geqslant(\frac{n}{k})^\gamma$，$\gamma>0$，又假设$\rho(n)\ll(\log\log n)^{-1-\sigma}(\sigma>0)$，$d_k=\frac{\log^\alpha k}{k}$，其中$\alpha\geqslant -1$，$D_n=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}d_k$，则对于任意分布函数$G$，(2)式和(3)式等价.

$\forall\ x\in X_G$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k I(\frac{S_k}{a_k}\leqslant x)=G(x)\ \text{a.s.}. \tag{2}$$

$\forall\ x\in C_G$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k P(\frac{S_k}{a_k}\leqslant x)=G(x). \tag{3}$$

证明 由文献[8]的性质7.1以及文献[9]的第2部分，可得(2)，(3)式分别与(4)，(5)式等价，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k f(\frac{S_k}{a_k})=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}G(x)\ \text{a.s.}, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k Ef(\frac{S_k}{a_k})=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}G(x), \tag{5}$$

其中f是任意有界的lipschitz函数. 所以要证明(2)式和(3)式等价，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k(f(\frac{S_k}{a_k})-Ef(\frac{S_k}{a_k}))=0\ \text{a.s.}. \tag{6}$$

令$\xi_k=f(\frac{S_k}{a_k})-Ef(\frac{S_k}{a_k})$，再由引理1，要证明(6)式只需证明存在$\beta>1$，使得

$$\mathrm{Var}(\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k\xi_k)\ll(\log D_n)^{-\beta}. \tag{7}$$

分别就$\alpha>-1$和$\alpha=-1$两种情况证明(7)式：

当$\alpha>-1$时，可得$D_n\ll\frac{1}{\alpha+1}\log^{\alpha+1}n$，$\log D_n\ll\log\log n$，此时，(7)式即为

$$\mathrm{Var}(\frac{1}{\log^{\alpha+1}n}\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\xi_k)\ll(\log\log n)^{-\beta}. \tag{8}$$

对于$l>2k$，有

$$|E(\xi_k\xi_l)|=|\mathrm{cov}(f(\frac{S_k}{a_k}),f(\frac{S_l}{a_l}))|\leqslant$$

$$|\mathrm{cov}(f(\frac{S_k}{a_k}),f(\frac{S_l}{a_l})-f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l}))|+|\mathrm{cov}(f(\frac{S_k}{a_k}),f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l}))|. \tag{9}$$

由f有界和引理2，可得

$$|\mathrm{cov}(f(\frac{S_k}{a_k}),f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l}))|\ll\rho(k). \tag{10}$$

由Cauchy-Schwarz不等式，Lipschitz函数性质，条件$ES_n^2\leqslant a_n^2$和$\frac{a_n}{a_k}\geqslant(\frac{n}{k})^r$，可得

$$|\mathrm{cov}(f(\frac{S_k}{a_k}),f(\frac{S_l}{a_l})-f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l}))|=$$

$$E(f(\frac{S_k}{a_k})-Ef(\frac{S_k}{a_k}))(f(\frac{S_l}{a_l})-f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l})-E(f(\frac{S_l}{a_l})-f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l})))\leqslant E|f(\frac{S_l}{a_l})-f(\frac{S_l-S_{2k}}{a_l})|\leqslant E(\frac{|S_{2k}|}{a_l})\ll(E(\frac{S_{2k}}{a_l})^2)^{\frac{1}{2}}\ll\frac{a_{2k}}{a_l}\ll(\frac{k}{l})^\gamma. \tag{11}$$

由(9～11)式，可得

$$|E(\xi_k\xi_l)|\ll(\frac{k}{l})^\gamma+\rho(k). \tag{12}$$

又因为

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n\frac{\log^\alpha i}{i}\xi_i)\leqslant E(\sum_{i=1}^n\frac{\log^\alpha i}{i}\xi_i)^2\ll\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}\geqslant l}}\frac{\log^\alpha k\log^\alpha l}{kl}|E(\xi_k\xi_l)|+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}<l}}\frac{\log^\alpha k\log^\alpha l}{kl}|E(\xi_k\xi_l)|\ll\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2. \tag{13}$$

再分别对$\sum_1$，$\sum_2$进行估计. 先估计$\sum_1$，因为$|E\xi_k\xi_l|\leqslant C$，所以

$$\sum\nolimits_1\ll\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}\geqslant l}}\frac{\log^\alpha k\log^\alpha l}{kl}=\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\sum_{l=k+1}^{k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}}\frac{\log^\alpha l}{l}.$$

当$\alpha>0$时，有

$$\sum\nolimits_1\leqslant\log^\alpha n\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\cdot\sum_{l=k+1}^{k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}}\frac{1}{l}\ll(\log^\alpha n)(\log\log\log n)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\ll(\log^{2\alpha+1}n)(\log\log\log n). \tag{14}$$

当$-1<\alpha\leqslant 0$时，有

$$\sum\nolimits_1\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\sum_{l=k+1}^{k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}}\frac{1}{l}\ll(\log\log\log n)\cdot\sum_{k=1}^n\frac{\log^\alpha k}{k}\ll(\log\log\log n)(\log^{\alpha+1}n). \tag{15}$$

所以，综合(14)式和(15)式，可得

$$\sum\nolimits_1\ll(\log\log\log n)(\log^{2\alpha+1}n). \tag{16}$$

再估计$\sum_2$，由(12)式可得

$$\sum\nolimits_2\ll\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}<l}}\frac{\log^\alpha k\log^\alpha l(\rho(k)+(\frac{k}{l})^r)}{kl}\cdot\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}<l}}\frac{\rho(k)\log^\alpha k\log^\alpha l}{kl}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}}<l}}\frac{(\frac{k}{l})^\gamma\log^\alpha k\log^\alpha l}{kl}\ll\sum\nolimits_{21}+\sum\nolimits_{22}. \tag{17}$$

(下转第205页 Continue on page 205)

从表 3 中的极差值可以看出，当超参数 $\lambda \in [9, 10]$，截尾寿命试验下产品平均寿命的 Bayes 估计值之间都比较接近，符合统计决策中的稳健性，结合表 3 从统计决策的精确度及稳健性的角度去考虑，超参数 α 的取值不宜过大，在$[0.1, 0.9]$之间取值比较合适，估计值随超参数 λ 的增大而减小，所以对 λ 取值不宜过大也不宜过小，应根据实际情况适当选取（如：本例题中 λ 在$[9,10]$上取值比较合适）.

4 结束语

从统计决策精确性与稳健性的角度分析，在完全寿命试验与截尾寿命试验下，产品的平均寿命的 Bayes 估计值在适当的选取超参数 λ, α 值的情况下都比较稳健且精确度也很高，所以运用 Bayes 估计与截尾寿命试验的思想方法来解决产品的平均寿命问题是可行的. 另一方面，通过截尾寿命试验可以大大的缩短产品试验的时间，从而提高生产效率，提高经济效益.

参考文献：

[1] 韩明，催玉萍. 几何分布可靠度估计[J]. 运筹与管理，2001，10(4)：35-38.

[2] 赵喜林. 几何分布可靠度的截尾 Bayes 估计[J]. 武汉科技大学学报，2004，3(1)：93-95.

[3] 熊常伟，张德然，张怡. 熵损失函数下几何分布可靠度的 Bayes 估计[J]. 数理统计与管理，2008，27(1)：82-86.

[4] 韩明. 指数分布无失效数据的 Bayes 分析[J]. 宁波大学学报，1996，9(4)：59-61.

[5] 张睿. 复合 LINEX 损失下的参数估计[D]. 大连：大连理工大学，2007.

[6] 峁诗松，汤银才，王玲玲. 可靠性统计[M]. 北京：高等教育出版社，2008.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第 201 页 Continue from page 201）

由假设条件 $\rho(n) \ll (\log\log n)^{-1-\sigma} (\sigma > 0)$，可得

$$\sum\nolimits_{21} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\rho(k)\log^{\alpha} k}{k} \ll$$

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\log^{\alpha} k}{k(\log\log k)^{1+\sigma}} \ll \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{2\alpha+1} l}{l(\log\log l)^{1+\sigma}} \ll$$

$$\frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{1+\sigma}}. \tag{18}$$

又因为

$$\sum\nolimits_{22} \ll \frac{1}{(\log\log n)^{2}} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n \\ k(\log\log n)^{\frac{2}{r}} < l}} \frac{\log^{\alpha} k \log^{\alpha} l}{kl} \ll$$

$$\frac{1}{(\log\log n)^{2}} \sum_{l=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} l}{l} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \ll \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{2}}. \tag{19}$$

综合(17) ~ (19) 式可得

$$\sum\nolimits_{2} \ll \frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{\beta}}, \tag{20}$$

其中 $\beta = 2 \wedge (1+\sigma) > 1$.

由(13) 式，(16) 式和(20) 式，可得

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\log^{\alpha+1} n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \xi_k\right) = \left(\frac{1}{\log^{2\alpha+2} n}\right) \cdot$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{\alpha} k}{k} \xi_k\right) \ll \frac{1}{\log^{2\alpha+2} n}\left((\log\log\log n)\log^{2\alpha+1} n + \right.$$

$$\left.\frac{\log^{2\alpha+2} n}{(\log\log n)^{\beta}}\right) = \frac{\log\log\log n}{\log n} + \frac{1}{(\log\log n)^{\beta}} \ll \frac{1}{(\log\log n)^{\beta}}.$$

即(8) 式成立.

当 $\alpha = -1$ 时，同理可证结论成立.

参考文献：

[1] Brosamler G A. An almost everywhere central limit theorem[J]. Math Proc Camb Phil Soc，1988，104：561-574.

[2] Schatte P. On strong version of the central limit theorem [J]. Math Nachr，1988，137：249-256.

[3] Lacey M T，Philipp W. A note on the almost limit theorem[J]. Statist Probab Lett，1990，9：201-205.

[4] Peligard M，Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem[J]. Statist Prolab Lett，1995，22：131-136.

[5] Shao Q M. Maximal inequalities for sums of ρ-mixing sequences[J]. Ann Prob，1995，23：948-965.

[6] Hu T C，Rosalsky A，Volodin A I. On the golden ratio，strong law，and first passage problem [J]. Mathematical Scientist，2005，16：1-10.

[7] 陆传荣，林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京：高等教育出版社，1999.

[8] Billingsley P. Convergence of probability measures[M]. Wiley，New York：Stochastic Processes & Their Appl，1999：139-148.

[9] Peligrad M，Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables [J]. Statist Probab Lett，1995，22：131-136.

（责任编辑：尹　闯）