分数导数粘弹性地基上无限长弹性梁的稳态响应分析*

Steady State Response of Elastic Beam with Infinite Length on Viscoelastic Ground Described by Fractional Derivative Model

刘瑞春[1],刘林超[2]
LIU Rui-chun[1],LIU Lin-chao[2]

(1.河南水利建筑工程有限公司,河南郑州 450008;2.信阳师范学院土木工程学院,河南信阳 464000)

(1. Henan Water Conservancy Construction Engineering Co. ,LTD,Zhengzhou,Henan,450008,China;2. School of Civil Engineering,Xinyang Normal University,Xinyang,Henan,464000,China)

摘要:将土体视为粘弹性材料,用分数导数 Kelvin 粘弹性模型描述土体的应力-应变关系,建立分数导数模型描述粘弹性地基上无限长弹性梁的运动控制方程,并通过数值算例分析分数微分算子的阶数对无限长弹性梁稳态响应的影响.结果表明,分数导数微分算子的阶数对梁的稳态响应有较大的影响,在低频和高频时的影响相反,在低频时,分数导数微分算子的阶数越大,位移和弯矩越大,分数导数粘弹性模型比经典粘弹性模型应用范围还要广.

关键词:分数导数　粘弹性地基　稳态响应

中图法分类号:O317　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0126-03

Abstract: The soil is regarded as viscoelastic material, and the stress-strain relationship of soil is described by fractional derivative Kelvin viscoelastic model. The fractional derivative model is established, the motion control equations of the elastic beam with infinite length on foundation described. The influence of the order of fractional differential operator on the steady-state response elastic beam with infinite length is analyzed by numerical example. The result indicated that the order of fractional differential operator had great effect on the steady response to the beam, and the influence is opposite and higher frequency. At lower frequency the larger the order of fractional derivative the larger the disaplacement and bending moment. The fractional derivativer viscoelastic model has larger application scope than classic viscoelastic model.

Key words: fractional derivative, viscoelasticity foundation, steady response

弹性地基梁理论自建立以来在铁路、公路、高层建筑地基、地下管道等工程中得到了广泛的应用.目前,弹性地基上梁的静力和振动问题已经得到很好的解决[1~3].随着流变理论在土木工程中的应用和发展,人们认识到考虑地基和结构的时间效应更符合工程实际,并且能很好地解释一些工程现象[4].近年来,不少学者将地基土视为粘弹性材料研究粘弹性地基上梁的静动力学问题,如颜可珍等[5]利用三角级数和Laplace-Fourier 积分变换法,在考虑地基剪切变形和压缩变形的情况下求得了粘弹性地基无限长板在冲击荷载作用下动力响应问题的解析解.然而,将地基土视为粘弹性材料,就必须采用合适的粘弹性模型,由于经典粘弹性模型的核函数(蠕变柔量、松弛模量)经常是指数函数的组合(这是由整数阶微分算子的性质决定的),欲精确描述实验的数据,常常不得不取消高阶的微分项或者以降低本构模型的应用范围为代价[6].随着分数导数理论的发展和应用,基于分数导数理论的粘弹性本构模型能够在较宽的频率范围内描述材料的力学行为,而且确定模型所需的实验参数少,被认为是一种能比较精确描述这一类材料本构关系的模型.而土体的力学行为受环境条件和地质条件

收稿日期:2009-06-19
修回日期:2009-09-14
作者简介:刘瑞春(1973-),男,工程师,主要从事建筑施工、岩土力学等研究。
* 上海市自然科学基金项目(06ZR14037),信阳师范学院 2009 年度青年基金项目(200942)资助。

的影响较大，所以利用分数导数粘弹性模型理论具有较大的实际应用背景. 本文利用分数导数 Kelvin 粘弹性模型描述土体的应力-应变关系，对粘弹性地基上无限长弹性梁的稳态响应进行分析.

1 分数导数粘弹性地基阻力与位移关系

对粘弹性地基，设其应力应变关系满足分数导数 Kelvin 粘弹性模型[7]，即

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) + cD^{\alpha}\varepsilon(t). \tag{1}$$

这里，D^{α} 是 Riemann-liouville 分数微分算子，$0<\alpha<1$，其表达式为

$$D^{\alpha}[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

其中，Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 定义为 $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$，$\mathrm{Re}z>0$，当 $\alpha=1$ 时，即为经典的 Kelvin 粘弹性模型.

为了求解单位面积上的地基阻力，我们取长宽高都为单位长度的立方体为单元，则地基的位移与应变满足

$$w(x,t) = 1\cdot\varepsilon(t). \tag{3}$$

地基阻力 $f(x,t)$ 和应力满足

$$f(x,t) = 1\cdot 1\cdot\sigma(t). \tag{4}$$

由(1)式、(3)式、(4)式可得地基阻力 $f(x,t)$ 与位移的关系为

$$f(x,t) = kw(x,t) + cD^{\alpha}w(x,t). \tag{5}$$

2 分数导数粘弹性地基上无限长梁的运动控制方程

考虑如图 1 所示的粘弹性地基上的无限长梁，无限长梁上作用一简谐集中荷载 $P(t)=P_0e^{i\omega t}$. 梁的弹性模量为 E，截面为矩形，长和宽分别为 b 和 h，密度为 ρ. 将集中力作用点设为坐标原点，考虑问题的对称性，这里只取右半部分进行研究.

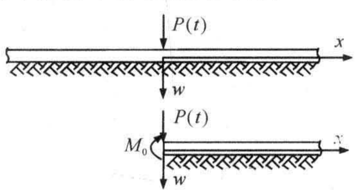

图 1 分数导数粘弹性地基上的无限长梁

Fig. 1 Infinite beam on visicoelastic on foundation described by fractional derivative model

取单位长度梁的微元体，由力的平衡很容易得到分数导数粘弹性文克尔地基上梁的振动微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4w(x,t)}{\mathrm{d}x^4} + m\frac{\mathrm{d}^2w(x,t)}{\mathrm{d}t^2} + bkw(x,t) + bcD^{\alpha}w(x,t) = 0. \tag{6}$$

设相应的初始条件为

$$w(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}w(x,t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

$w(x,t)$ 无穷远处的条件为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}^n w(x,t)}{\mathrm{d}x^n} = 0, n=0,1,2,3. \tag{9}$$

由于体系作稳态振动，所以梁的位移解的形式为

$$w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}. \tag{10}$$

将(10)式代入(6)式，并考虑分数导数的性质，可得

$$\frac{\mathrm{d}^4W}{\mathrm{d}x^4} + 4\lambda^4W = 0. \tag{11}$$

这里 $\lambda^4=\frac{k+c(i\omega)^{\alpha}-\rho h\omega^2}{Eh^3/3}$. 求解方程(11)并考虑无穷远处梁的位移为零的条件，可得

$$W = e^{-\lambda x}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x), \tag{12}$$

A，B 为待定系数. 由对称性可知原点处梁的边界条件为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}|_{x=0} = 0, \tag{13}$$

$$Q|_{x=0} = -EI\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}|_{x=0} = -\frac{P}{2}. \tag{14}$$

考虑边界条件(13)、(14)可得 $A=B=\frac{3P_0}{2\lambda^3Ebh^3}$. 由此可以确定分数导数粘弹性文克尔地基上梁的位移的幅值为

$$W = \frac{3P_0}{2\lambda^3Ebh^3}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x + \sin\lambda x). \tag{15}$$

由位移与转角、弯矩、剪力之间的关系可得分数导数粘弹性文克尔地基上梁的转角、弯矩、剪力的幅值分别为

$$\theta = -\frac{3P_0}{\lambda^2Ebh^3}e^{-\lambda x}\sin\lambda x, \tag{16}$$

$$M = \frac{3P_0}{\lambda Ebh^3}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x - \sin\lambda x), \tag{17}$$

$$Q = -\frac{3P_0}{Ebh^3}e^{-\lambda x}\cos\lambda x. \tag{18}$$

3 数值算例

图 2～4 中各参数取值为 $b=0.5\mathrm{m}$，$h=1.0\mathrm{m}$，$k=5.5\times10^7\mathrm{N/m^2}$，$c=8.6\times10^8\mathrm{N/m^2}$，$P_0=1.8\times10^3\mathrm{N}$，$E=2.0\times10^9\mathrm{N/m^2}$.

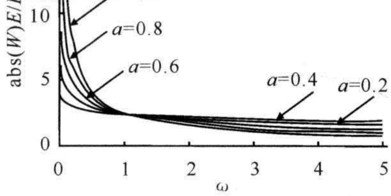

图 2 位移随频率的变化曲线（$x=0$）

Fig. 2 The curves of displacement varying with frequency($x=0$)

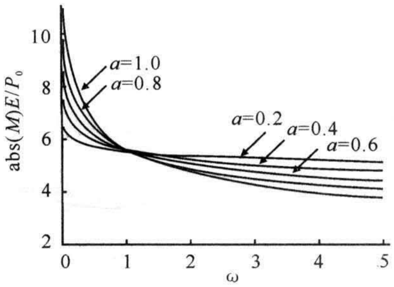

图 3　弯曲矩随频率的变化曲线（$x=0$）

Fig. 3　The curves of moment varying with frequency($x=0$)

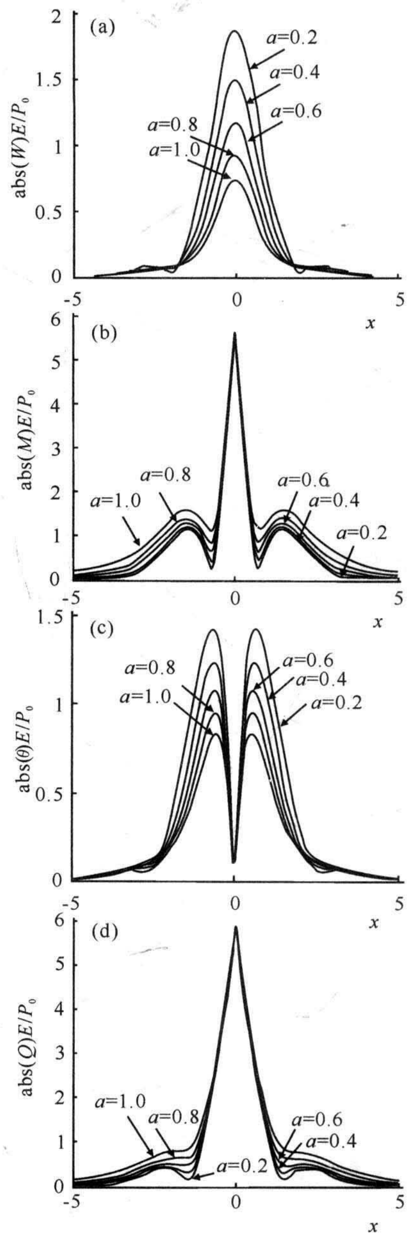

图 4　位移(a)、弯矩(b)、转角(c)和剪力(d)随 x 的变化曲线

Fig. 4　The curves of displacement (a), moment (b), corner(c) and shear(d) varying with x

从图 2 和图 3 可以看出，梁位移、弯矩随频率的变化曲线形式大致相同，随频率的增大逐渐减小并趋于稳定，这是由于频率较大时梁的位移还没来得及发生振动就已经向相反方向运动；不同的分数导数微分算子阶数 α 曲线存在交点，也就是说，在低频时，分数导数微分算子的阶数越大，位移和弯矩越大，在高频时，分数导数微分算子的阶数越大，位移和弯矩则越小. 由图 4 可以看出，在 $x=0$ 处的位移、弯矩、剪力最大，随 x 的增大，当 $x>3$ 时曲线基本趋于零. 而转角在 $x=0$ 处为零，大约在 $x=1$ 处转角达到最大值，最大值对应的 x 值可以根据具体的参数确定. 分数导数微分算子的阶数 α 越大，位移、转角越小，而弯矩剪力则越大. 另外，我们针对不同环境下的土体，可以通过改变分数微分算子 α 来拟合其应力应变关系，可见，分数导数本构模型较经典粘弹性模型可以在较大的范围内描述土体的力学行为.

4　结束语

本文基于分数导数理论、粘弹性理论，研究分数导数粘弹性地基上无限长梁在集中荷载作用下的稳态响应问题，对数值算例进行分析可以得出结论：(1)分数导数微分算子的阶数对梁的稳态响应有较大的影响，在低频和高频时的影响相反，在低频时，分数导数微分算子的阶数越大，位移和弯矩越大；(2)我们可以通过改变分数导数微分算子的阶数来拟合不同环境土体的应力应变关系，分数导数粘弹性模型较经典粘弹性模型应用范围要广；(3)本文的研究方法还可以应用到分数导数粘弹性地基其他结构的静动力学问题.

参考文献：

[1]　王爱琴. 弹性半空间地基上梁的静力弯曲解析解[J]. 长安大学学报：自然科学版，2008，28(5)：73-76.

[2]　李立，刘东燕. 土质地基上受集中力作用的有限长梁的内力分析[J]. 重庆建筑大学学报，2005，27(5)：73-77.

[3]　周华飞，蒋建群，张土乔. 移动荷载下 Kelvin 地基上无限长梁的稳态响应[J]. 浙江大学学报：工学版，2004，38(10)：1328-1333.

[4]　刘学山，冯紫良，胥兵. 粘弹性地基上弹性梁的自由振动分析[J]. 上海力学，1999，20(4)：470-476.

[5]　颜可珍，夏唐代，黄立亏. 双参数粘弹性地基无限长板的瞬态动力响应分析[J]. 岩石力学与工程学报，2005，24(24)：4576-4580.

[6]　刘林超，张卫. 具有分数 Kelvin 模型的粘弹性岩体中水平圆形硐室的变形特性[J]. 岩土力学，2005，26(2)：287-289.

[7]　Nobuyuki Shimizu，Zhang Wei. Fractional calculus approach to dynamic problem of viscoelastic materials [J]. JSME International Journal 1999，42(Series C)：827-830.

（责任编辑：尹　闯）