凸非线性规划的一个预估-校正跟踪路径算法*

A Predictor-corrector Tracking Path Algorithm for Convex Nonlinear Programming

黄青群[1,2],王祥玲[1],杨　萌[1]
HUANG Qing-qun[1,2],WANG Xiang-ling[1],YANG Meng[1]

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林　541004;2. 河池学院数学系,广西宜州 546300)

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Mathematics, Hechi University, Yizhou, Guangxi, 546300, China)

摘要:提出一个预估-校正跟踪组合内点同伦路径算法,证明其全局收敛性,并用实数值算例验证其有效性. 该算法由任意给定的一个内点,通过跟踪组合同伦路径得到凸非线性规划问题的解,并由 β- 锥邻域在可行域的内部确保迭代点是内点. 该算法全局收敛,是一种求解凸非线性规划问题的有效算法.

关键词:凸非线性规划　组合内点同伦　预估-校正　全局收敛

中图法分类号:O232　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0114-04

Abstract:A predictor-corrector tracking combined homotopy interior point path algorithm, its global convergence is proposed, and its effectiveness is validated with real numerical example. The algorithm from any given interior point to track the combined homotopy interior point path reaches the solution for convex nonlinear programming. The β- cone neighborhood included in the interior part of the feasible region ensures that the iterative points are interior points. The algorithm is globally convergent, and it is an efficient algorithm for convex nonlinear programming.

Key words:convex nonlinear programming, combined interior homotopy, predictor-corrector, global convergence.

考虑非线性规划问题(NLP):

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m, \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$, $f(x)$, $g_i(x)$ 为充分光滑函数. 自从文献[1,2]提出运用组合同伦内点法求解非凸规划问题后,数值求解 NLP 的报道越来越多[3~5]. 文献[4]利用预估 - 校正算法求解凸非线性规划问题,并证明算法的大范围线性及局部次平方收敛性;文献[5]用跟踪组合内点同伦路径算法求解非凸非线性规划问题,证明算法的全局收敛性及多项式复杂性. 本文在文献[4,5]的基础上,提出一个结合预估 - 校正和跟踪组合同伦路径的算法,并证明了算法的全局收敛性,其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

收稿日期:2009-10-19
修回日期:2009-12-09
作者简介:黄青群(1980-),女,助教,硕士,主要从事优化理论与算法研究。
*国家自然科学基金项目(10501009),广西自然科学基金项目(桂科自 0728206),广西高校优秀人才计划项目资助。

1　预备知识

给出一些记号:

$\Omega = \{x \in R^n : g_i(x) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,m\}$, $\Omega^0 = \{x \in R^n : g_i(x) < 0, i = 1,2,\cdots,m\}$, $\partial\Omega = \Omega \backslash \Omega^0$,

$B(x) = \{i \in \{1,2,\cdots,m\}; g_i(x) = 0\}$, $R^n_+ = \{x \in R^n : x \geqslant 0\}$, $R^n_{++} = \{x \in R^n : x > 0\}$,

$g = (g_1,\cdots,g_m)^T$, $\nabla f(x) = (\frac{\partial f(x)}{\partial x})^T$, $\nabla g(x) = (\nabla g_1(x),\cdots,g_m(x))^T$.

定义 1　我们称

$$H(\omega) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \nabla g(x)y \\ Yg(x) \end{pmatrix} = 0, g(x) \leqslant 0,$$

$y \geqslant 0,$ (2)

其中 $\omega = (x, y)^{\mathrm{T}}, Y = \mathrm{diag}(y)$ 为问题(1) 的 K-K-T 系统. 若(x,y)满足(2)式,则称x为(1)式的K-K-T点,称y为对应于x的拉格朗日乘子.

文献[3]给出无约束优化问题$\min\limits_{x \in \Omega} \phi(x, x^{(0)}, \mu)$,其中$\phi(x, x^{(0)}, \mu) = (1-\mu)f(x) + \frac{\mu}{2}\|x - x^{(0)}\|^2 - \mu(1-\mu)\sum\limits_{i=1}^{m}\zeta_i \ln(-g_i(x)), \mu \in (0,1], x^{(0)} \in \Omega^0, \zeta_i > 0$ 为权系数,$\zeta = (\zeta_i, \cdots, \zeta_m)^{\mathrm{T}}$,其等价形式为

$$H(\omega,\mu) = \begin{pmatrix} (1-\mu)(\nabla f(x) + \nabla g(x) y) + \mu(x - x^{(0)}) \\ Y g(x) + \mu\zeta \end{pmatrix} = 0, \quad (3)'$$

其中 $\mu \in (0,1], x^{(0)} \in \Omega^0$. 当 $\zeta = e = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 时,(3)′ 即为本文所运用的同伦方程

$$H(\omega,\mu) = \begin{pmatrix} (1-\mu)(\nabla f(x) + \nabla g(x) y) + \mu(x - x^{(0)}) \\ Y g(x) + \mu e \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

同伦方程 $H(\omega,\mu) = 0$ 的解产生一条解曲线 Γ,称 Γ 为同伦路径,且满足以下 3 个条件时,可以证明同伦路径

$$\Gamma = \{(\omega,\mu): H(\omega,\mu) = 0, \mu \in (0,1]\} \subset \Omega^0 \times R^m_{++} \times (0,1]$$

的存在性和收敛性:

(A_1) Ω^0 非空有界.

(A_2) $\forall\, x \in \partial\Omega, \{\nabla g_i(x): i \in B(x)\}$ 是列满秩矩阵.

(A_3) $\forall\, x \in \partial\Omega, \Omega$ 在 x 点的法锥与 Ω 仅交于点 x,即 $\forall\, x \in \partial\Omega$,有

$$\{x + \sum_{i \in B(x)} \nabla g_i(x) y_i; y_i \geqslant 0, i \in B(x)\} \cap \Omega = \{x\}.$$

2 算法

令 $N(\beta,\mu) = \{(\omega,\mu): \|H(\omega,\mu)\| \leqslant \beta\mu, \mu \in (0,1]\}$. 称$N(\beta,\mu)$为$\beta$-锥邻域,其中$\beta>0$为该邻域半径.

引理 1 设 $y > 0, \beta \in (0,1)$,则有 $N(\beta,\mu) \subset \Omega^0 \times R^m_{++} \times (0,1]$.

证明 由β-锥邻域的定义知$\|H(\omega,\mu)\| \leqslant \beta\mu$. 又由方程(3)的第二项有 $\|Yg(x) + \mu e\| \leqslant \beta\mu$,从而 $-\beta\mu \leqslant Y_i g_i(x) + \mu \leqslant \beta\mu$,整理得 $y_i g_i(x) \leqslant (\beta - 1)\mu < 0$. 由于 $y_i > 0$,所以 $g_i(x) < 0$. 综上有 $N(\beta,\mu) \subset \Omega^0 \times R^m_{++} \times (0,1]$.

算法(路径跟踪预估-校正算法):

步骤 0(初始化).

令 $k = 0, \mu_0 = 1, \beta_0 = 1, \beta \in (0, \beta_0), (\omega^{(0)}, 1) \in N(\beta, 1), \alpha = (0,1), \delta \in (0,1), \varepsilon > 0$.

步骤 1(终止条件).

若 $\mu_k < \varepsilon$,停止,且 $\omega^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})^{\mathrm{T}}$ 为方程(3)的近似解.

步骤 2(计算预估点$(\bar{\omega}^{(k)}, \mu_{k+1})$).

(i) 计算解曲线 Γ 在$(\omega^{(k)}, \mu_k)$的切方向,即求 $\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$,使其满足

$$\frac{\partial H(\omega^{(k)}, \mu_k)}{\partial \omega} s + \frac{\partial H(\omega^{(k)}, \mu_k)}{\partial \mu} = 0, \quad (4)$$

其中

$$H'_{\omega}(\omega,\mu) = \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} (1-\mu)(\nabla^2 f(x) + \nabla^2 g(x) y) + \mu I & (1-\mu)\nabla g(x) \\ Y \nabla g(x)^{\mathrm{T}} & \mathrm{diag}(g(x)) \end{pmatrix},$$

$$H'_{\mu}(\omega,\mu) = \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x) - \nabla g(x) y + x - x^{(0)} \\ e \end{pmatrix}.$$

令 $\begin{pmatrix} \Delta\bar{\omega}^{(k)} \\ \Delta\mu_k \end{pmatrix} = -\alpha\mu_k \begin{pmatrix} s^{(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) 令$(\bar{\omega}^{(k)}, \mu_{k+1}) = (\omega^{(k)} + \Delta\bar{\omega}^{(k)}, \mu_k + \Delta\mu_k)$.

步骤 3(计算校正点$(\omega^{(k+1)}, \mu_{k+1})$).

(i) 固定 μ_{k+1},在 $\bar{\omega}^{(k)}$ 点计算 $H(\omega, \mu_{k+1}) = 0$ 的 Newton 步 $\eta^{(k)}$,即 $\eta^{(k)}$ 满足

$$H'_{\omega}(\bar{\omega}^{(k)}, \mu_{k+1})\eta^{(k)} + H(\bar{\omega}^{(k)}, \mu_{k+1}) = 0.$$

(ii) 取 Newton 步长 λ_k,它是满足

$$\|H(\bar{\omega}^{(k)} + \lambda_k \eta^{(k)}, (1 - \alpha\lambda_k)\mu_k)\| \leqslant (1 - \alpha\lambda_k)\beta\mu_k \quad (5)$$

的 $1, \delta, \delta^2, \cdots$ 中的最大值. 令 $\omega^{(k+1)} = \bar{\omega}^{(k)} + \lambda_k \eta^{(k)}$, $k := k + 1$,返回步骤 1.

引理 2 若$f(x), g_i(x), i = 1, 2, \cdots, m$为充分光滑函数,$\omega^{(0)} \in \Omega^0 \times R^m_{++}$,则对任意的$\mu \in (0,1]$,$(\omega,\mu) \in N(\beta,\mu)$,$H'_{\omega}(\omega,\mu)$ 是非奇异的.

证明 由

$$H'_{\omega}(\omega,\mu) = \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} (1-\mu)Q(\omega) + \mu I - (1-\mu)\nabla g(x) G(x)^{-1} Y \nabla g(x)^{\mathrm{T}} & 0 \\ Y \nabla g(x)^{\mathrm{T}} & G(x) \end{pmatrix},$$

其中 $Q(\omega) = \nabla^2 f(x) + \nabla^2 g(x) y, I \in R^{n \times n}$ 为单位矩阵,$G(x) = \mathrm{diag}(g(x))$,得

$$|H'_{\omega}(\omega,\mu)| = |G(x)| \cdot |(1-\mu)Q(\omega) + \mu I - (1-\mu)\nabla g(x) G(x)^{-1} Y \nabla g(x)^{\mathrm{T}}|.$$

因为 Y 为正对角矩阵,$G(x)$ 为非奇异矩阵,且由 $\nabla^2 f(x), \nabla^2 g(x)$ 为半正定矩阵知 $Q(\omega)$ 为半正定矩阵. 故对所有 $\omega \in \Omega^0, g(x) < 0, y > 0, (1-\mu)Q(\omega) + \mu I - (1-\mu)\nabla g(x) G(x)^{-1} Y \nabla g(x)^{\mathrm{T}}$ 为正定矩

阵. 因此 $|H'_\omega(\omega,\mu)| \neq 0$,即 $H'_\omega(\omega,\mu)$ 是非奇异矩阵.

注 由引理 2 可知方程(4) 有唯一解,且 $\Delta\mu_k = -\alpha\mu_k$.

3 算法的全局收敛性

引理 3 假设 $H(\omega,\mu)$ 是由方程(3) 定义的,再给定有界凸集 $M \subset R^{n+m}$,则对任意的 $\omega \in M, \mu \in (0,1]$,存在一个常数 $C_1 > 0$,使得 $\|\frac{\partial^2 H_i(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)^2}\| \leqslant C_1, i = 1,2,\cdots,n+m$.

证明 因为 $\frac{\partial^2 H_i(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)^2}$ 仅与 ω,μ 有关,函数 $f(x), g_i(x)$ 充分光滑,从而 $H(\omega,\mu)$ 也充分光滑,故当 ω 属于有界凸集 M, $\mu \in (0,1]$ 时,存在一个常数 $C_1 > 0$,使得 $\|\frac{\partial^2 H_i(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)^2}\| \leqslant C_1, i = 1,2,\cdots,n+m$.

引理 4 假设 $H(\omega,\mu)$ 是由方程(3) 定义的,再给定有界凸集 $M \subset R^{n+m}$,则对任给的 $z,\omega \in M, v,\mu \in (0,1]$ 及引理 3 的常数 $C_1 > 0$,有

$$\|H(z,v) - H(\omega,\mu) - \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\| \leqslant \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\|\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\|^2.$$

证明 任给 $i \in \{1,2,\cdots,n+m\}$,由 Taylor 展式有

$$H_i(z,v) = H_i(\omega,\mu) + \frac{\partial H_i(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 H_i(\zeta_i,\eta_i)}{\partial(\omega,\mu)^2}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}.$$

这里 $\zeta_i = \omega + \theta_1(z-\omega), \eta_i = \mu + \theta_2(v-\mu), \theta_1,\theta_2 \in (0,1)$. 由引理 3,有

$$\|H(z,v) - H(\omega,\mu) - \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m}\left(H_i(z,v) - H_i(\omega,\mu) - \frac{\partial H_i(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 H_i(\zeta_i,\eta_i)}{\partial(\omega,\mu)^2}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m}\frac{1}{4}C_1^2\|\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\|^4} = \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\|\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix}\|^2.$$

引理 5 若 $(\Delta\omega,\Delta\mu)^{\mathrm{T}}$ 是 $H(\omega,\mu) = 0$ 关于变量 ω,μ 的 Newton 步,则有

$$\|H(\omega+\lambda\Delta\omega,\mu+\lambda\Delta\mu)\| \leqslant (1-\lambda)\|H(\omega,\mu)\| + \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\lambda^2\|\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\mu \end{pmatrix}\|^2. \tag{6}$$

证明 因为 $(\Delta\omega,\Delta\mu)^{\mathrm{T}}$ 是 $H(\omega,\mu) = 0$ 关于变量 ω,μ 的 Newton 步,即 $H(\omega,\mu) + \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\mu \end{pmatrix} = 0$. 设 $z = \omega + \lambda\Delta\omega, v = \mu + \lambda\Delta\mu$,其中 $\lambda \in [0,1]$,则有

$$H(z,v) - H(\omega,\mu) - \frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} z-\omega \\ v-\mu \end{pmatrix} = H(z,v) - H(\omega,\mu) - \lambda\frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\mu \end{pmatrix} = H(z,v) - (1-\lambda)H(\omega,\mu).$$

结合引理 4 有 $\|H(\omega+\lambda\Delta\omega,\mu+\lambda\Delta\mu)\| \leqslant (1-\lambda)\|H(\omega,\mu)\| + \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\lambda^2\|\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\mu \end{pmatrix}\|^2$.

引理 6 假设 $\{(\omega^{(k)},\mu_k)\} \subset N(\beta,\mu_k) \subset \Omega^0 \times R^m_{++} \times (0,1]$ 为无穷序列,且 $\frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}$ 为非奇异矩阵,则存在常数 $C_2 > 0$,使得

$$\|\begin{pmatrix} \Delta\omega^{(k)} \\ \Delta\mu_k \end{pmatrix}\| \leqslant C_2\beta\mu_k. \tag{7}$$

证明 因为 $\{(\omega^{(k)},\mu_k)\} \subset N(\beta,\mu_k) \subset \Omega^0 \times R^m_{++} \times (0,1]$ 为无穷序列,且 $\frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)}$ 为非奇异矩阵,则存在常数 $C_2 > 0$,使得 $\|(\frac{\partial H(\omega,\mu)}{\partial(\omega,\mu)})^{-1}\| \leqslant C_2$,于是有 $\|\begin{pmatrix} \Delta\omega^{(k)} \\ \Delta\mu_k \end{pmatrix}\| = \|(\frac{\partial H(\omega^{(k)},\mu_k)}{\partial(\omega,\mu)})^{-1}\|\|H(\omega^{(k)},\mu_k)\| \leqslant C_2\beta\mu_k$.

定理 1 设 $\{(\omega^{(k)},\mu_k)\}$ 是预估-校正跟踪路径算法产生的无穷序列,则

(i) $(\omega^{(k)},\mu_k) \in N(\beta,\mu_k)$, (8)

$(1-\alpha\lambda_{k-1})\cdots(1-\alpha\lambda_0) = \mu_k, k = 0,1,2,\cdots$ (9)

(ii) 对所有的 $k \geqslant 0$,有 $\lambda_k \geqslant \hat{\lambda} = \delta\bar{\lambda}$,其中 $\bar{\lambda} = \min\{1, \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{n+m}C_1C_2^2\beta}\}$. 因此,$\{\mu_k\}$ 全局收敛于 0.

(iii) 序列 $\{\|H(\omega^{(k)})\|\}$ 全局收敛于 0.

(iv) 序列 $\{(x^{(k)},y^{(k)})\}$ 收敛到方程(3) 的一个解,即 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 NLP(1) 的一个解.

证明 (i) 由数学归纳法,当 $k = 0$ 时,$(\omega^{(0)},\mu_0) = (\omega^{(0)},1) \in N(\beta,1)$,$\mu_0 = 1$ 结论成立. 假设对所有的 $k > 0$ 结论成立. 则对于 $k+1$,由本文算法有 $(\omega^{(k+1)},\mu_{k+1}) \in N(\beta,\mu_{k+1})$,其中 $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$,且

$\mu_{k+1} = (1-\alpha\lambda_k)\mu_k = (1-\alpha\lambda_k)(1-\alpha\lambda_{k-1})\cdots(1-\alpha\lambda_0)$.

(ii) 由引理 5 及引理 6,有

$$\|H(\omega^{(k)}+\lambda\Delta\omega^{(k)},\mu_k+\lambda\Delta\mu_k)\|^2 \leqslant (1-\lambda)\beta\mu_k + \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\lambda^2C_2^2\beta^2\mu_k^2 \leqslant (1-\lambda)\beta\mu_k + \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\lambda^2C_2^2\beta^2\mu_k.$$

易证，当 $\lambda \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{n+m}C_1C_2^2\beta}$ 时，有 $(1-\lambda)\beta\mu_k + \frac{\sqrt{n+m}}{2}C_1\lambda^2C_2^2\beta^2\mu_k \leqslant (1-\alpha\lambda)\beta\mu_k$. 因此，取 $\bar{\lambda} = \min\{1, \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{n+m}C_1C_2^2\beta}\}$，有 $\lambda_k \geqslant \hat{\lambda} = \delta\bar{\lambda}$，结合(7)式有 $\mu_k \leqslant (1-\alpha\hat{\lambda})^k\mu_0 = (1-\alpha\hat{\lambda})^k \to 0(k\to\infty)$，所以$\{\mu_k\}$全局收敛于0.

(iii) 因为

$$H(\omega^{(k)},\mu_k) - H(\omega^{(k)}) = \mu_k\begin{pmatrix} -(\nabla f(x^{(k)}) + \nabla g(x^{(k)})y^{(k)}) + x^{(k)} - x^{(0)} \\ e \end{pmatrix},$$

所以必存在常数 $C_3 > 0$，使得 $\|H(\omega^{(k)},\mu_k) - H(\omega^{(k)})\| \leqslant C_3\mu_k$. 因此有

$$\|H(\omega^{(k)})\| \leqslant \|H(\omega^{(k)},\mu_k)\| + \|H(\omega^{(k)},\mu_k) - H(\omega^{(k)})\| \leqslant (\beta + C_3)\mu_k \to 0(k\to\infty),$$

故序列$\{\|H(\omega^{(k)})\|\}$全局收敛于0.

(iv) 由 $\left\|\begin{pmatrix}\omega^{(k+1)}\\ \mu_{k+1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\omega^{(k)}\\ \mu_k\end{pmatrix}\right\| = \lambda_k\left\|\begin{pmatrix}\Delta\omega^{(k)}\\ \Delta\mu_k\end{pmatrix}\right\| \leqslant \left\|\begin{pmatrix}\Delta\omega^{(k)}\\ \Delta\mu_k\end{pmatrix}\right\| \leqslant C_2\beta\mu_k \to 0(k\to\infty)$，知$\{\omega^{(k)}\}$柯西收敛于某点 ω^*，又由 $(\omega^{(k)},\mu_k) \in N(\beta,\mu_k)$ 知 $\omega^* \in \Omega \times R_+^m$. 因此，$\omega^*$ 是同伦方程(3)的一个解，x^* 是NLP(1)的K-K-T系统(2)的解.

4 数值算例

例 1[4] 取 $n=2, m=4, f(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-4)^2, g_1(x) = -x_1, g_2(x) = -1-x_2, g_3(x) = x_1+x_2-3, g_4(x) = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4$，利用本文算法，求解问题(1)的解.

解 取常数 $\alpha = 0.1, \beta = 0.9$，初始点 $\omega^{(0)} = (1,0,0.5,0.5,0.5,0.2)^T$，$\mu_0 = 1$，计算可得最优点 $x^{(*)} = (1.0000, 2.0000)^T$，最优值 $f(x^*) = 5.000021$，在最优点处的约束函数值 $g(x^*) = (-1.000000, -2.999995, -5.145189, -2.058098)$.

例 2[6] 取 $n=4, m=7, f(x) = x_1^2 + 0.5x_2^2 + x_3^2 + 0.5x_4^2 - x_1x_3 + x_3x_4 - x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$. $g_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 5, g_2(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 4, g_3(x) = -x_2 - 4x_3 + 1.5, g_4(x) = -x_1, g_5(x) = -x_2, g_6(x) = -x_3, g_7(x) = x_4$，利用本文算法，求解问题(1)的解.

解 取常数 $\alpha = 0.1, \beta = 0.9$，初始点 $\omega^{(0)} = (1;0.5;0.5;-0.5;1;0.5;1;0.5;1;1)^T$，$\mu_0 = 0.5$，计算可得最优点 $x^{(*)} = (0.3325, 2.3206, 0.0103, -0.0146)^T$，最优值 $f(x^*) = -4.4696$，在最优点处的约束函数值 $g(x^*) = (-0.0307, -0.6468, -0.8618, -0.3325, -2.3206, -0.0103, -0.0146)$.

参考文献：

[1] Feng G, Lin Z, Yu B. Existence of an interior pathway to a Karush-Kuhn-Tucker point of a non-convex programming problem[J]. Nonlinear Anal, 1998, 32: 761-768.

[2] Feng G, Yu B. Combined homotopy interior point method for nonlinear programming problems [C]//Fujita H, Yamaguti M(Eds). Advances in Numerical Mathematics; Proceedings of the second Japan-China Seminar on Numerical Mathematics, in: Lecture Notes in Numerical and Applied Analysis, vol 14, Kinokuniya, Tokyo, 1995: 9-16.

[3] Lin Z, Yu B, Feng G. A combined homotopy interior point method for convex nonlinear programming [J]. Math-ematics and Computation, 1997, 84: 193-211.

[4] Lin Z, Sheng Z, Yang L, et al. A predictor corrector algorithm for tracing combined interior homotopy pathway[J]. Math Numer Sinica, 2002, 24: 407-416.

[5] Fan X. A globally convergent interior point algorithm for non-convex nonlinear programming [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224: 622-627.

[6] Fan X, Yu B. A polynomial path following algorithm for convex programming [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 196: 866-878.

(责任编辑：尹 闯)