广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(2):111～113

离散 T-S 模糊广义系统稳定性的一个新判别条件*

A New Stability Condition of Discrete Singular T-S Fuzzy Systems

杜　富[1],梁家荣[2],张晶华[1]
DU Fu[1],LIANG Jia-rong[2],ZHANG Jing-hua[1]

(1.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004;2.广西大学计算机与电子信息学院,广西南宁　530004)
(1. School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:利用离散广义 Lyapunov 方法和分段模糊 Lyapunov 函数,研究输入采用双交叠模糊分划的离散广义模糊系统的性质,得出新的判定离散 T-S 模糊广义系统稳定性的充分条件,即在最大交叠规则组内寻求公共正定矩阵,并用算例说明这种方法的有效性.

关键词:分段模糊 Lyapunov 函数　离散广义系统　稳定性分析　模糊分划
中图法分类号:O231　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0111-03

Abstract: Based on stability criteria of discrete singular systems by using Lyapunov method and piecewise fuzzy Lyapunov function, the stability is studied for discrete singular fuzzy systems with their inputs employing two-overlapped fuzzy partition. A new sufficient condition that searches for a common positive-definite symmetric matrices in each maximal overlapped-rule group is obtained to check the stability of the discrete singular T-S fuzzy systems. An example shows the stability result.

Key words: piecewise fuzzy Lyapunov function, discrete singular system, stability analysis, fuzzy partition

自从 Takagi 和 Sugeno 在 1985 年提出了 T-S 模糊控制模型,该模型便成为目前模糊控制领域最活跃的一个分支.近年来,在离散时间系统及广义连续时间系统的稳定性研究及控制器设计中,许多学者采用 T-S 模糊控制系统的系统设计和控制器设计的方法,取得大量的成果[1~7].但是,在广义离散时间系统的研究中,采用 T-S 模糊技术的文献并不是很多,文献[8]基于离散广义系统的极点域配置方法在模糊系统的基础上提出了稳定性判据的充分条件;文献[9]在文献[8]的基础上,研究一类不确定离散广义系统的鲁棒稳定性问题,得出了这类 T-S 模糊系统动态模型一致正则、因果和稳定的充分条件;文献[10]利用 Lyapunov 方法研究一类 T-S 模糊离散广义系统的稳定性问题,并给出了系统一致正则、因果和稳定的充分条件,由于条件中含有规范化隶属度函数,因此限制了它的应用范围.本文运用文献[2]提出的双交叠模糊分划及最大交叠规则组等概念,构造出离散广义型分段模糊 Lyapunov 函数,得出一个新的离散 T-S 模糊广义系统的稳定性的充分条件,即在最大交叠规则组内寻求公共正定矩阵 P,该条件不仅适用于文献[10]中的模糊规则数较少的情形而且适用模糊规则数较多的情形,从而增加了条件的适用性.

收稿日期:2009-07-24
修回日期:2009-10-23

作者简介:杜　富(1980-),男,硕士研究生,主要从事广义系统、变结构控制和模糊控制研究。

* 国家自然基金项目(60564001),教育部"新世纪优秀人才支持计划"专项基金(NCET-06-0756),广西研究生教育创新计划项目(2007105930812M49)资助。

1　预备知识

考虑 T-S 模糊离散广义系统模型,其第 i 条模糊

规则具有如下形式

Ri:IF ζ_1 is M_{1i} and ζ_2 is M_{2i} and $\cdots$and ζ_p is M_{pi},

Then $Ex(k+1) = A_i x(k), i = 1,2,\cdots,r$, (1)

其中:$M_{ji}(j = 1,2,\cdots,p)$ 是模糊集;r 是模糊规则数;$x \in R^n$ 是状态向量;E 和 A_i 是适当维数的定常矩阵,E 为奇异矩阵;前件变量 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_p$ 是状态向量的函数,且 $\zeta = [\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_p]^{\mathrm{T}}$. 则由单点模糊化、乘积推理机、加权平均解模糊化的推理方法可得系统的全局模型为

$$Ex(k+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\zeta) A_i x(k), \tag{2}$$

其中 $h_i(\zeta) = \dfrac{\beta_i(\zeta)}{\sum\limits_{i=1}^{r}\beta_i(\zeta)} \geqslant 0$ 是规范化隶属度函数,满足 $\sum\limits_{i=1}^{r} h_i(\zeta) = 1, \beta_i(\zeta) = \prod\limits_{j=1}^{p} M_{ji}(\zeta_j)$.

定义 1 定义如下形式的分段光滑的广义 Lyapunov 函数:

$$V(Ex(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) = \sum_{l=1}^{m}\eta_l V_l = \sum_{l=1}^{m}\eta_l x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P_l Ex(k), \tag{3}$$

其中 $P = \sum\limits_{l=1}^{m}\eta_l P_i, P_l^{\mathrm{T}} = P_l > 0$.

定义 2 离散模糊广义系统(2) 是一致正则、因果和稳定的,若满足下列条件:(a) 存在常数 s 使 $\det(sE - \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(\zeta)A_i) \neq 0$;(b) 对于 $Ex(k) \neq 0$,$\exists\, P \in R^{n\times n}$ 使得(3) 式所定义的分段光滑的广义 Lyapunov 函数 $V(Ex(k))$ 满足 $\Delta V = V(Ex(k+1)) - V(Ex(k)) < 0$ 且 $E^{\mathrm{T}}PE \geqslant 0$.

定义 3[4] 在输入采用双交叠模糊分划的模糊系统中,设任意一个交叠规则组为 $\Theta_t(t = 1,2,\cdots,c)$,离散分段广义模糊 Lyapunov 函数定义为:

$$V(Ex(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k), P = \sum_{t=1}^{c}\lambda_t P_t, \tag{4}$$

其中 $\lambda_t(x(k)) = \begin{cases} 1, x(k) \in \Theta_t \\ 0, x(k) \notin \Theta_t \end{cases}, \sum\limits_{t=1}^{c}\lambda_t(x(k)) = 1, P_t = \sum\limits_{i\in L_t} h_i(\zeta)P_i$,$c$ 为交叠规则组数,$L_t = \{\Theta_t$ 中包含的规则序号$\}$.

引理 1[5] 设 P 是 n 阶正定矩阵,如果存在 n 阶方阵 A 和 B,使得 $A^{\mathrm{T}}PA - P < 0$ 和 $B^{\mathrm{T}}PB - P < 0$ 成立,则有 $A^{\mathrm{T}}PB + B^{\mathrm{T}}PA - 2P < 0$.

2 主要结论

定理 1 对输入采用双交叠模糊分划的离散 T-S 模糊广义系统(2) 式,其一致正则、因果、稳定的充分条件是在各最大交叠规则组中分别存在正定对称矩阵 P_i 满足:

$$E^{\mathrm{T}}P_l E \geqslant 0,$$
$$A_i^{\mathrm{T}}P_l A_i - E^{\mathrm{T}}P_l E < 0, i \in D_l, \tag{5}$$

(5) 式中 D_l 为 G_l 中包含的规则序号集,G_l 为第 l 个最大交叠规则组,$l = 1,2,\cdots,\prod\limits_{j=1}^{n}(m_j - 1)$,$m_j$ 为第 j 个输入变量模糊分划数.

证明 设系统的状态输入为 $x^{\mathrm{T}}(k) = [x_1(k), x_2(k),\cdots,x_n(k)]$,任意一个交叠规则组为 $\Theta_t(t = 1, 2,\cdots,c$,$c$ 为交叠规则组数),$L_t = \{\Theta_t$ 中包含的规则序号$\}$.

若 $x(k)$ 与 $x(k+1)$ 在同一个交叠规则组,则系统在第 t 个交叠规则组上的局部模型为

$$Ex(k+1) = \sum_{i\in L_t} h_i(\zeta)A_i(k), \tag{6}$$

如果存在公共正定对称矩阵 P_l 满足:

$$E^{\mathrm{T}}P_l E \geqslant 0,$$
$$A_i^{\mathrm{T}}P_l A_i - E^{\mathrm{T}}P_l E < 0, i \in L_t, \tag{7}$$

设 $\mathrm{rank}E = q$,则存在两个可逆矩阵 M 和 N 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

相应对(7) 式做如下分解:

$$M^{-\mathrm{T}}P_l M^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$MA_i N = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 \\ \overline{A}_3 & \overline{A}_4 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

由(7) ~ (9) 式得 $P_1 \geqslant 0$,由(7) ~ (10) 式得

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \overline{A}_2^{\mathrm{T}}P_1\overline{A}_2 + H + H^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

其中 $H = (\overline{A}_2^{\mathrm{T}}P_2 + \frac{1}{2}\overline{A}_4^{\mathrm{T}}P_3)\overline{A}_4$,因为 $P_1 \geqslant 0$ 得 $H + H^{\mathrm{T}} < 0$,易得 $\overline{A}_4$ 可逆,则(6) 式正则.

选择 $V_t(Ex(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P_l Ex(k)$ 为交叠规则组的一个 Lyapunov 函数,则

$$\Delta V_t = V_t(Ex(k+1)) - V_t(Ex(k)) = x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}P_l Ex(k+1) - x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P_l Ex(k) = x^{\mathrm{T}}(k)[(\sum_{i\in L_t} h_i(\zeta)A_i^{\mathrm{T}})P_l(\sum_{i\in L_t} h_i(\zeta)A_i) - E^{\mathrm{T}}P_l E]x(k). \tag{12}$$

因为 $\sum\limits_{i\in L_t}\sum\limits_{k\in L_t} h_i(\zeta)h_k(\zeta) = 1, i,k \in L_t$. 所以

$$\Delta V_t = x^{\mathrm{T}}(k)[\sum_{i\in L_t}\sum_{k\in L_t} h_i(\zeta)h_k(\zeta)(A_i^{\mathrm{T}}P_l A_k - E^{\mathrm{T}}P_l E)]x(k) = x^{\mathrm{T}}(k)[\sum_{i\in L_t} h_i^2(\zeta)(A_i^{\mathrm{T}}P_l A_i - E^{\mathrm{T}}P_l E) + \Lambda]x(k), \tag{13}$$

其中 $\Lambda = \sum_{i,k\in L_t}^{i<k} h_i(\zeta)h_k(\zeta)(A_i^{\mathrm{T}}P_lA_k - E^{\mathrm{T}}P_lE + A_k^{\mathrm{T}}P_lA_i - E^{\mathrm{T}}P_lE)$，由引理 1 知 $\Lambda < 0$，那么

$$\Delta V_t < x^{\mathrm{T}}(k)[\sum_{i\in L_t} h_i^2(\zeta)(A_i^{\mathrm{T}}P_lA_i - E^{\mathrm{T}}P_lE)]x(k) < 0. \tag{14}$$

若 $x(k)$ 与 $x(k+1)$ 不在同一个交叠规则组，则在各交叠规则组上定义如下特征函数

$$\lambda_t x(k) = \begin{cases}1, x(k) \in \Theta_t \\ 0, x(k) \notin \Theta_t\end{cases}, \sum_{t=1}^{c}\lambda_t(x(k)) = 1,$$

则模糊系统在整个输入论域上的总体模型可表示为

$$Ex(k+1) = \sum_{t=1}^{c}\lambda_t(x(k))(\sum_{i\in L_t}h_i(\zeta)A_ix(k)), \tag{15}$$

令 $P = \sum_{t=1}^{c}\lambda_tP_l$，在整个论域上构造 Lyapunov 函数为

$$V(Ex(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}\sum_{t=1}^{c}\lambda_tP_lEx(k) = \sum_{t=1}^{c}\lambda_tx^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}P_lEx(k) = \sum_{t=1}^{c}\lambda_tV_t(x(k)), \tag{16}$$

(16) 式的正则性易由(6) 式的推导过程直接得出. 下面验证 ΔV，则

$$\Delta V = V(Ex(k+1)) - V(Ex(k)) = \sum_{t=1}^{c}\lambda_tV_t(Ex(k+1)) - \sum_{t=1}^{c}\lambda_tV_t(Ex(k)) = \sum_{t=1}^{c}\lambda_t[V_t(Ex(k+1)) - V_t(Ex(k))] = \sum_{t=1}^{c}\lambda_t\Delta V_t < 0. \tag{17}$$

可知若存在正定对称矩阵 P_l 满足(5) 式，那么系统(2) 一致正则、因果且稳定.

3 数值算例

例 1 考虑离散广义模糊系统(2)，其中

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix}-6.4 & 2.96 & 2.4\\-1.76 & 1.376 & 0.64\\-4.8 & 2.24 & 1.6\end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix}-3.5 & 1.9 & 1.5\\-0.8 & 1.16 & 0.4\\-3 & 1.4 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix}-8.37 & 3.81 & 2.7\\-2.31 & 1.158 & 0.72\\-5.4 & 2.25 & 1.8\end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix}-6.56 & 2.664 & 2.16\\-1.928 & 0.8064 & 0.576\\-4.32 & 2.016 & 1.44\end{bmatrix}.$$

利用 LMI 工具箱，可得(5) 式的可行解：

$$P_1 = \begin{bmatrix}0.1510 & -0.0124 & -0.2163\\-0.0124 & 0.0155 & 0.0123\\-0.2163 & 0.0123 & 0.3046\end{bmatrix}.$$

由定理 1 知系统一致正则、因果且稳定.

参考文献：

[1] Johansson M, Rantzer A, Arzen K E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999(7): 713-722.

[2] 修智宏，任光. T-S 模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计[J]. 自动化学报，2004，30(5)：731-741.

[3] 张松涛，任光. 离散 T-S 模糊控制系统的稳定性分析与系统化设计[J]. 中国电机工程学报，2006，26(7)：113-117.

[4] 张松涛，任光. 基于分段模糊 Lyapunov 方法的离散模糊控制系统设计[J]. 系统仿真学报，2007，19(2)：353-354.

[5] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.

[6] Wang Wen-June, Sun Chung-Hsun. Relaxed stability and stabilization conditions for a T-S fuzzy discrete system[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 156(2): 208-225.

[7] Wu Huai-Ning. Robust H2 fuzzy output feedback control for discrete-time nonlinear systems with parametric uncertainties[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2007, 46(1): 151-165.

[8] Huang C P. Stability analysis of discrete singular fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(1): 155-165.

[9] Xu S Y, Song B, Lu J W, et al. Robust stability of uncertain discrete-time singular fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(20): 2306-2316.

[10] 朱宝彦，张庆灵，佟绍成. 一类 Takagi-Sugeno 模糊离散广义系统的稳定性判据[J]. 控制理论与应用，2007，24(1)：113-116.

(责任编辑：韦廷宗)