伪度量族与一致结构格集的关系及格集之并的性质

Relations between Family of Pseudo-metrics and Gage of Uniformity and Properties on Union of Gages

沈 晨

SHEN Chen

(中国石油大学数学与计算科学学院,山东东营 257061)

(College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum,Dongying, Shandong,257061,China)

摘要:给出非空集 X 的伪度量族 P 为格集的一个充分必要条件,构造使 P 不为格集的反例,并讨论由格集之并所生成的一致结构的性质.

关键词:伪度量族 格集 一致结构

中图法分类号:O189.11 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)02-0105-03

Abstract:The necessary and sufficient condition for a family P of pseudo-metrics for non-empty set X to be a gage is given, some counterexamples for P not to be a gage are constructed, and the property of uniformity generated by union of gages is discussed.

Key words:family of pseudo-metrics,gage,uniformity

对于拓扑空间之间的映射,可考虑其连续性,但一致连续性却无法考虑. A. Weil[1]引进的一致空间与拓扑空间有密切的联系,具有类似于度量空间的某些性质,并且可以建立映射的一致连续性. 由于每个一致结构[2~5]都由它的格集完全确定,因此,研究有关格集的问题,有助于认识一致结构与一致空间. 本文给出非空集 X 的伪度量族为格集的一个充分必要条件,构造出使 P 不为格集的反例,并讨论由格集之并所生成的一致结构的性质.

1 预备知识

设 X 为非空集合,对于 $A,B\subset X\times X$ 及 $x\in X$,我们记

$\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$($X\times X$ 的对角线);

$A^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in A\}$;

$A\circ B=\{(x,y)\in X\times X\mid\exists\, z\in X:(x,z)\in B$ 且 $(z,y)\in A\}$.

以下总假定集 X 非空.

定义 1[6~9] 集 X 的一个一致结构是 $X\times X$ 的一个非空子族 μ,且满足:

(a)$\forall\, U\in\mu:\Delta\subset U$; (b)$\forall\, U\in\mu:U^{-1}\in\mu$; (c)$\forall\, U\in\mu,\exists\, V\in\mu:V\circ V\subset U$; (d)$\forall\, U,V\in\mu:U\cap V\in\mu$; (e) 若 $U\in\mu$ 且 $U\subset V\subset X\times X$,那么 $V\in\mu$.

此时,称 (X,μ) 为一致空间. 进一步,设 β 为 μ 的一个子族,若 $\forall\, U\in\mu,\exists\, B\in\beta:B\subset U$,则称 β 为 μ 的一个基;又设 δ 为 μ 的一个子族,若 $\{D\mid D$ 为 δ 中有限个元之交$\}$ 为 μ 的一个基,则称 δ 为 μ 的一个子基.

定义 2[6,7] 设 R 为实数集,R 的通常一致结构 v 定义为$\{U\subset R\times R\mid\exists\, r>0:\{(x,y)\mid |x-y|<r\}\subset U\}$.

以下我们将具有通常一致结构 v 的一致空间 (R,v) 简记为 R.

定义 3[6~8] 设 (X,μ),(Y,v) 是两个一致空间,$f:X\to Y$. 称 f 关于 μ 和 v 是一致连续的,若 $\forall\, V\in v$: $\{(x,y)\mid(f(x),f(y))\in V\}\in\mu$. 简称其为 $f:(X,\mu)\to(Y,v)$ 是一致连续的.

引理 1[6,7] 设 I 为指标集,且 $\forall\,\alpha\in I:(X_\alpha,\mu_\alpha)$ 为一致空间,则存在 $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ 的一致结构,使得 $\forall\,\alpha\in I$,射影:$P_\alpha:(\prod_{\alpha\in I}X_\alpha,\mu)\to(X_\alpha,\mu_\alpha)$ 一致连续,且 μ 是

收稿日期:2009-10-23

修回日期:2009-12-12

作者简介:沈 晨(1959-),男,副教授,主要从事一般拓扑学、分形几何学方面的研究工作。

$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ 的满足此条件的最小一致结构.

定义 4 引理 1 中的 μ 称为 $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$(相应于 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I}$) 的乘积一致结构. 特别地，若 $\forall\ \alpha \in I: \mu_\alpha = v$,则称 μ 为 $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$(相应于 v) 的乘积一致结构.

设 (X,μ) 为一致空间，p 为 X 的一个伪度量,ω 为 $X\times X$ 的乘积一致结构,v 为实数集 R 的通常一致结构. 称 p 关于 ω 一致连续,若 $p:(X\times X,\omega)\to(R,v)$ 一致连续.

引理 2[6,7] 设 (X,μ) 为一致空间，p 为 X 的一个伪度量,ω 为 $X\times X$ 的乘积一致结构,v 为实数集 R 的通常一致结构,则 p 关于 ω 一致连续的充要条件为

$$\forall\ r>0:\{(x,y)\in X\times X\,|\,p(x,y)<r\}\in\mu.$$

定义 5[6,7] 设 p 为集 X 的一个伪度量,$\forall\ r>0$,记 $V_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X\,|\,p(x,y)<r\}$,则 X 的以 $\{V_{p,r}|r>0\}$ 为基的一致结构称为由 p 所生成的一致结构. 又设 P 为集 X 的一个伪度量族，则 X 的以 $\{V_{p,r}|p\in P,r>0\}$ 为子基的一致结构称为由 P 所生成的一致结构.

称 X 的一个伪度量族 P 为 μ 的格集，若存在 X 的一致结构 μ,使得 $P=\{p|p$ 为 X 的伪度量,且关于 $X\times X$ 的乘积一致结构一致连续$\}$.

引理 3[6,7] 设 P 为集 X 的一个伪度量族,v 是由 P 所生成的一致结构,则 v 是使得 P 的每个元 p 关于 $X\times X$ 的乘积一致结构为一致连续的最小一致结构. 且 X 的每个一致结构由该一致结构的格集所生成.

定义 6[10] 称集 X 的两个伪度量 p_1 与 p_2 等价，若存在常数 $c_1,c_2>0,\forall\ (x,y)\in X\times X$:

$$c_1p_1(x,y)\leqslant p_2(x,y)\leqslant c_2p_1(x,y).$$

引理 4[2,3] 设 (X,μ) 为一致空间,P 为 μ 的格集，则 $\{V_{p,r}|p\in P,r>0\}$ 为 μ 的一个基.

2 主要结果

命题 1 设 μ,v 是集 X 的两个一致结构,且 $\mu\subset v$,记 $X\times X$ 相应于 μ 的乘积一致结构为 ω_μ(与 ω_v 的意义类同). 又设 p 为 X 的一个伪度量,若 $p:(X\times X,\omega_\mu)\to R$ 一致连续,那么 $p:(X\times X,\omega_v)\to R$ 也一致连续.

证明 $\forall\ r>0$,由引理 2 的必要性,$V_{p,r}\in\mu\subset v$,再由引理 2 的充分性知 $p:(X\times X,\omega_v)\to R$ 一致连续. 证明完毕.

命题 2 设 P 为集 X 的一个伪度量族,由 P 所生成的 X 的一致结构记为 v, 并记 v 的格集为 Q,则 P 为格集 $\Leftrightarrow P=Q$;P 不为格集 $\Leftrightarrow P$ 为 Q 的真子族.

证明 先证明:P 为格集 $\Leftrightarrow P=Q$. "$\Leftarrow$". 由定义知"$\Leftarrow$" 成立. "$\Rightarrow$". 由定义知,存在 X 的一致结构 μ: P 为 μ 的格集. 由引理 3 及格集定义,$P\subset Q$,且 $v\subset\mu$. 由 $v\subset\mu$ 及命题 1,$\forall\ q\in Q:q\in P$,故 $Q\subset P$,于是 $P=Q$.

再证明:P 不为格集 $\Leftrightarrow P$ 为 Q 的真子族. "$\Leftarrow$". 由 $P\neq Q$ 及命题 2 前部分证明可知"$\Leftarrow$" 成立. "$\Rightarrow$". 由条件及 $P\subset Q$(由定义及引理 2) 可知"$\Rightarrow$" 成立. 证明完毕.

命题 3 设 (X,μ) 为一致空间,p_1,p_2 为 X 的两个等价的伪度量. 记 $X\times X$ 的乘积一致结构为 ω,则 $p_1:(X\times X,\omega)\to R$ 一致连续的充要条件为 $p_2:(X\times X,\omega)\to R$ 一致连续.

证明 由条件,$\exists\ c_1,c_2>0,\forall\ (x,y)\in X\times X$: $c_1p_1(x,y)\leqslant p_2(x,y)\leqslant c_2p_1(x,y)$.

设 $p_1:(X\times X,\omega)\to R$ 一致连续,为了证明 p_2 的一致连续性,由引理 2,只须证 $\forall\ r>0:V_{p_2,r}\in\mu$. 为此，证明 $\exists\ s>0:V_{p_1,s}\subset V_{p_2,r}$ 即可. 令 $s=\frac{r}{c_2}$,则 $\forall\ (x,y)\in V_{p_1,s}:p_2(x,y)\leqslant c_2p_1(x,y)<c_2s=r$,故 $(x,y)\in V_{p_2,r}$,于是 $V_{p_1,s}\subset V_{p_2,r}$. 再由两个伪度量等价的对称性知,$p_2$ 的一致连续性蕴涵 p_1 的一致连续性. 证明完毕.

利用命题 2、3 来构造使 X 的伪度量族 P 不为格集的反例.

反例 1 设集 X 至少含有两个点，p 为 X 的一个伪度量. 令 $P=\{p\}$,则 P 不为格集.

证明 由 P 所生成的 X 的一致结构记为 v,并记 v 的格集为 P_v, 由引理 3 及格集定义知 $p\in P_v$. 于是,对任意正数 $c\neq1$,由命题 3 知,$cq\in P_v$. 但是 $cq\notin P$,故 $P\neq P_v$. 由命题 2,P 不为格集. 证明完毕.

命题 4 设 $\{\mu_i|i\in I\}$ 是集 X 的一族一致结构,记 μ_i 的格集为 $P_i(i\in I)$. 令 $P=\bigcup_{i\in I}P_i$,并记 P 所生成的一致结构为 v,则 v 是 X 的细于每个 μ_i(即 $\mu_i\subset v$) 的最小一致结构.

证明 先证明 $\forall\ i\in I:\mu_i\subset v$. 由引理 4 知,$\{V_{p_i,r}|p_i\in P_i,r>0\}$ 为 μ_i 的一个基,又 $\{V_{p,r}|p\in P,r>0\}$ 为 v 的一个子基(定义 5),而 $\{V_{p_i,r}|p_i\in P_i,r>0\}\subset\{V_{p,r}|p\in P,r>0\}$,由定义知 $\mu_i\subset v$.

再证明 v 的最小性,即证任意细于每个 μ_i 的最小一致结构 $\mu:v\subset\mu$.

$\forall\ V\in v$,由定义 5 知,$\exists\ V_{p_i,r_i}\in\{V_{p,r}|p\in P,r>0\}(i=1,\cdots,n):\bigcap_{i=1}^{n}V_{p_i,r_i}\subset V$,其中 $p_i\in P_i$. 而 $V_{p_i,r_i}\in\mu_i\subset\mu$,故 $\bigcap_{i=1}^{n}V_{p_i,r_i}\in\mu$,于是 $V\in\mu$,从而 $v\subset\mu$. 证明

完毕.

利用命题 2.4 可构造如下反例说明格集的并未必为格集.

反例 2 设 μ_1,μ_2是集 X 的两个一致结构,它们的格集分别为 P_1 和 P_2,且 $\mu_1 \cup \mu_2$ 不为 X 的一致结构[9],则 $P_1 \cup P_2$ 不为格集.

证明 若 $P_1 \cup P_2$ 为格集,记由 $P_1 \cup P_2$ 所生成的一致结构为 v,则 $P_1 \cup P_2$ 为 v 的格集(命题 2),由引理 4,$\{V_{p,r} | p \in P_1 \cup P_2, r > 0\}$ 为 v 的一个基,故 $\forall V \in v, \exists p \in P_1 \cup P_2$ 及 $r > 0: V_{p,r} \subset V$. 由于 $\exists i \in \{1,2\}: p \in P_i$,而 P_i 为 μ_i 的格集,又由引理 2 知,$V_{p,r} \in \mu_i$,于是 $V \in \mu_i \subset \mu_1 \cup \mu_2$,因此,$v \subset \mu_1 \cup \mu_2$. 又由命题 4 知,$\mu_1, \mu_2 \subset v$,故 $\mu_1 \cup \mu_2 \subset v$,于是 $\mu_1 \cup \mu_2 = v$ 为 X 的一致结构,矛盾.

构造反例说明引理 4 之逆不真,即对于一致空间 (X,μ),设 P 为 X 的一族伪度量,且 $\{V_{p,r} | p \in P, r > 0\}$ 为 μ 的一个基,但 P 未必为 μ 的格集.

反例 3 设集 X 至少含有两个点,p 为 X 的一个伪度量,记由 $P = \{p\}$ 所生成的 X 的一致结构为 μ. 由定义 5 知,$\{V_{p,r} | p \in P, r > 0\} = \{V_{p,r} | r > 0\}$ 为 μ 的基. 但 P 不为格集(反例 1),因此 P 不为 μ 的格集.

关于格集的交和补,与命题 4 证明相仿,可以得出结论:

设 $\{\mu_i | i \in I\}$ 是集 X 的一族一致结构,记 μ_i 的格集为 $P_i (i \in I)$. 令 $P = \bigcap\limits_{i=1} P_i$,并记由 P 所生成的一致结构为 v,则 v 粗于每个 μ_i,即 $v \subset \mu_i$.

设 μ_1, μ_2 是集 X 的两个一致结构,它们的格集分别为 P_1 和 P_2,且 P_1 为 P_2 的真子族. 由定义 5 及引理 2,易知 μ_1 为 μ_2 的真子族. 但由 $P_2 \backslash P_1$ 所生成的一致结构 v 不能包含于 $u_2 \backslash u_1$,这是由于 $X \times X \in v$,而 $X \times X \notin u_2 \backslash u_1$.

参考文献:

[1] Weil A. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologic générale[M]. Paris:Actualites Sci Ind,1937.

[2] Hans-Peter A Künzi,Romaguera S,Sánchez Granero M A. The bicompletion of the Hausdorff quasi-uniformity [J]. Topology Appl,2009,156:1850-1862.

[3] Frith J,Schauerte A. The samuel compactification for quasi-uniform biframes[J]. Topology Appl, 2009, 156: 2116-2122.

[4] Hohti A. On the locally fine construction in uniform spaces, locales and formal spaces[J]. Acta Univ Carolin Math Phys,2005,46:27-47.

[5] Banaschewski B,Giuli E,Pultr A. Epimorphisms of uniform frames [J]. Topology Appl, 2006, 153: 3053-3058.

[6] Kelley J L. General topology[M]. New York:Spring-Verlag,1975:176-190.

[7] 李庆国,汤灿琴,李纪波. 一般拓扑学[M]. 长沙:湖南大学出版社,2006:122-123,128-137.

[8] 林寿. 度量空间与函数空间的拓扑[M]. 北京:科学出版社,1995:132-134.

[9] James I. Topologies and uniformities[M]. London: Springer,1999:103-106.

[10] Barnsley M F. Fractals everywhere[M]. Second Edition. New York:Academic Press Professional,1993: 12.

(责任编辑:尹　闯)

微 RNA 和植物根细胞命运

在经典植物模型拟南芥中对植物根发育所作的一项研究发现,一种微 RNA(miRNA165/6)与细胞间的通信有关,并且是根细胞命运的一个决定因子。将水和溶质从根向茎输送的木质部微管的模式形成,被发现取决于一个新颖的双向信号作用通道,该通道涉及一个转录因子在一个方向上、microRNA 在另一个方向上的细胞到细胞间的运动。这个转录因子为 HORTROOT,是在维管柱中产生的,它进入内皮中,在那里与 SCARECROW 一起激发微 RNA MIR165a 和 166b,后者又回到维管细胞中,降解它们的目标、编码“Class Ⅲ homeodomain-leucine zipper”转录因子的信使 RNA。这个调控通道中由在演化上保守的转录因子和 miRNA 组成的一个级联的参与表明,它也许是对陆地生长条件的一种演化适应。

(据科学网)