广西科学 Guangxi Sciences 2010,17(2):102～104

局部凸空间的平均强凸性与平均强光滑性*

Average Strong Convexity and Average Strong Smoothness in Locally Convex Spaces

伍一平[1],魏文展[2],杨祥钊[1],孙 钰[1]
WU Yi-ping[1], WEI Wen-zhan[2],YANG Xiang-zhao[1],SUN Yu[1]

(1. 广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023;2. 广西经贸职业技术学院,广西南宁 530021)
(1. School of Mathematical Sciences,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi, 530023,China;2. Guangxi Economic Trade Polytechnic,Nanning,Guangxi,530021,China)

摘要:给出局部凸空间平均强凸性和平均强光滑性的定义,刻画平均强凸和平均强光滑局部凸空间的特征,并建立了偶对平均强凸性和平均强光滑性之间的对偶关系.

关键词:局部凸空间 平均强凸性 平均强光滑性
中图法分类号:O177 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2010)02-0102-03

Abstract:The average strong convexity and average strong smoothness in locally convex spaces are introduced. Some necessary and sufficient conditions for average strong convexity (average strong smoothness) are obatained in locally convex spaces. In addition, we obatained the dual relations between average strong convexity and average strong smoothness are obatained.

Key words:locally convex spaces,average strong convexity,average strong smoothness

Diminnie 等[1]在 1977 年引进局部凸空间严格凸的概念,接着国起等[2]在 1989 年给出与文献[1]等价的严格凸定义,并且给出局部凸空间严格凸的对偶概念,即局部凸空间的光滑性,建立了它们之间的某种对偶关系. 1994 年苏雅拉图[3]给出局部凸空间强凸与强光滑的概念,同时建立它们之间的某种对偶关系. 2009 年林尤武等[4]给出局部凸空间平均一致凸与平均一致光滑的概念,并建立它们之间的某种对偶关系. 本文将强凸性和强光滑性的概念进一步推广到局部凸空间并对其进行相关探讨,建立它们之间的对偶关系.

1 预备知识

设 X 是实线性空间,P 是 X 上的一族半范数,且满足 $\bigcap_{p\in P} p^{-1}(0)=0$,其中 $p^{-1}(0)=\{x\in X:p(x)=0\}$. 令 T_P 是半范数族 P 生成的 X 上的局部凸拓扑,则 (X,T_P) 是局部凸 Hausdorff 空间,简称局部凸空间.

对每个 $p\in P$,考虑半范空间 (X,p). 用 $(X,p)'$ 表示 (X,p) 上连续线性泛函全体作成的对偶空间,其中范数定义为 $\|f\|'_p=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|,\forall f\in(X,p)'$. 则 $(X,p)'$ 按范数 $\|\cdot\|'_p$ 是一个 Banach 空间[2].

对 $\forall p\in P$,令 $U_p(X)=\{x\in X:p(x)\leqslant 1\}$, $S_p(X)=\{x\in X:p(x)=1\}$. 他们分别表示空间 (X,p) 上的单位球和单位球面. 用 $X'=(X,T_P)'$ 表示 (X,T_P) 的拓扑对偶空间,则 $X'(p)=\{f\in X':\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|<+\infty\}$ 是 X' 的线性子空间. 令 $S(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|'_p\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|=1\}$, $U(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|'_p=\sup_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|\leqslant 1\}$.

对 $\forall p\in P,x\in S_p(X)$,令 $\sum_p(x)=\{f\in X'(p):\|f\|'_p=1$ 且 $f(x)=1\}$,由 Hahn-Banach 定理知道 $\sum_p(x)$ 是非空的.

对任意正数族 $\{C_p>0:p\in P\}$,记 $B\{C_p\}=\{x\in X:p(x)\leqslant C_p,p\in P\}$,易知 $B\{C_p\}$ 是 (X,T_P) 中的绝对凸有界闭集. 对每个 $B\{C_p\}$,定义 X' 上的半范数[2] 为 $p'_{B\{C_p\}}(f)=\sup_{x\in B\{C_p\}}|f(x)|(\forall f\in X')$,并称

收稿日期:2009-10-09
作者简介:伍一平(1983-),男,硕士研究生,主要从事泛函分析理论研究。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0728050)资助。

$p'_{B\{C_p\}}$ 是由 $B\{C_p\}$ 决定的半范数.记 p' 是形如 $p'_{B\{C_p\}}$ 的半范数的全体,容易验证 p' 生成的 X' 上的局部凸拓扑恰好是 X' 上的强拓扑 $(X',T_{P'})$.对以上得到的 X' 半范数 p',考虑任意正数族 $\{C_{p'}>0:p'\in P'\}$.记 $B\{C_{p'}\}=\{f\in X';p'(f)\leqslant C_{p'},p'\in P'\}$,对每个 $B\{C_{p'}\}$,在 $X''=(X',T_{P'})'$ 上定义半范数 $p''_{B\{C_{p'}\}}(F)=\sup\limits_{f\in B\{C_{p'}\}}|F(f)|$(任意的 $F\in X''$),则形如 $p''_{B\{C_{p'}\}}$ 的半范数的全体 p'' 生成 X'' 上的强拓扑 $(X'',T_{P''})$.由文献[5]可以知道 $X''=(X',T_{P'})'$.

定义 1.1[5] 设 P 是实线性空间 X 上的一族半范数,B 是 (X,T_P) 中形如 $B\{C_p\}$ 的绝对凸有界闭集,若存在 $p\in P$,有 $C_p=1$,则称相应的 $B\{C_p\}$ 为 (X,T_P) 中的一个 p- 正规集.

为方便起见,在下文中常用一个字母 B 来表示 p- 正规集 $B\{C_p\}$.

引理 1.1[5] 对 $\forall\ p\in P$ 和 $x\in(X,T_P)$,有 $p(x)=\sup\limits_{f\in U(X'(p))}|f(x)|$ 成立,其中 $U(X'(p))=\{f\in X'(p):\|f\|_p\leqslant 1\}$ 是 X' 中的绝对凸 w^* 紧集.

2 平均强凸的局部凸空间

定义 2.1 称偶对 (X,P) 为平均强凸的,若对 $\forall\ p\in P,x\in S_p(X),\{x_n\}\subset S_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的,并且对于某个 $f\in\sum_p(x)$,当 $\lim\limits_n f(x_n)=1$ 时,有 $\lim\limits_n p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x)=0$.

注 1 当生成 X 上局部凸拓扑 T_P 的这一族半范数 P 是由单个元素 p 构成,并且 p 还是一个范数时,局部凸 Hausdorff 空间 (X,T_P) 则为一个 Banach 空间,此时定义 2.1 正好是文献[6]中给出的 Banach 空间平均强凸的等价定义.这表明局部凸空间的平均强凸性概念是 Banach 空间平均强凸性概念的推广.

定理 2.1 偶对 (X,P) 是平均强凸的当且仅当对 $\forall\ x\in S_p(X)$ 和 $\forall\ \varepsilon>0$,及某个 $f\in\sum_p(x)$,$\exists\ \delta>0$,使得当 $\{x_n\}\subset U_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的,且当 $\frac{1}{2}|f(x_n)+f(x)|>1-\delta$ 时,有 $\lim\limits_n p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x)=0$.

证明 必要性.假设 $\exists\ x_0\in S_p(X),f_0\in\sum_p(x)$ 和 $\varepsilon_0>0$,对任意的 $\delta_n=\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$,存在 $\{x_n\}\subset U_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的使得当 $\frac{1}{2}|f_0(x_n)+f_0(x_0)|>1-\delta$ 时,$p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x_0)\geqslant\varepsilon_0$.这时 $1-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}|f_0(x_n)+f_0(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}(p(x_n)+p(x_0))\leqslant 1$.因此 $\lim\limits_n f_0(x_n)=1$.由偶对 (X,P) 是平均强凸性可得 $\lim\limits_n P(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x_0)=0$,这与 $p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x_0)\geqslant\varepsilon_0$ 相矛盾.

充分性.若对 $\forall\ x\in S_p(X),\{x_n\}\subset U_p(X)$ 且 $\{x_n\}$ 是 T_P 有界的,及某个 $f\in\sum_p(x)$,当 $\lim\limits_n f(x_n)=1$,对 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得 $\frac{1}{2}|f(x_n)+f(x)|>1-\delta$ 时,则必有 $\lim\limits_n p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x_0)=0$.因为 $\lim\limits_n f(x_n)=1$,对于 $\delta>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时 $|f(x_n)-1|<2\delta$,于是有 $\frac{1}{2}|f(x_n)+f(x)|>1-\delta$.因此 $\lim\limits_n p(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k-x_0)=0$.故偶对 (X,P) 是平均强凸的空间.

3 平均强光滑的局部凸空间

定义 3.1 称偶对 (X,P) 为平均强光滑的,若对 $\forall\ p\in P,x\in S_p(X)$,$X$ 中含有 x 的任意 p- 正规集 B 决定的 X' 的半范数 p'_B,当 $\{f_n\}\subset S(X'(p))$ 满足 $\lim\limits_n f_n(x)=1$ 时,存在 $f\in\sum_p(x)$,使得 $\lim\limits_n p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k-f)=0$.

注 2 当 X 是 Banach 空间时,定义 3.1 恰好是 Banach 空间平均强光滑的等价定义[6].这说明局部凸空间平均强光滑性概念是 Banach 空间的平均强光滑性概念的推广.

定理 3.1 偶对 (X,P) 是平均强光滑的当且仅当对 $\forall\ p\in P,x\in S_p(X)$,$X$ 中含有 x 的任意 p- 正规集 B 决定的 X' 的半范数 p'_B 和 $\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,当 $\{f_n\}\subset S(X'(p))$ 且 $f_n(x)>1-\delta$ 时,$\exists\ f\in\sum_p(x)$,使得 $p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k-f)<\varepsilon$.

证明 必要性.设偶对 (X,P) 是平均强光滑的,假设 $\exists\ p\in P,x\in S_P(X)$,$X$ 中含有 x 的任意 p- 正规集 B 决定的 X' 的半范数 p'_B 和 $\varepsilon_0>0$,对于 $\delta_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,$\exists\ \{f_n\}\subset S(X'(p))$ 满足 $f_n(x)>1-\frac{1}{n}$,但对 $\forall\ f\in\sum_p(x)$,有 $p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k-f)\geqslant\varepsilon_0$,$\forall\ n\in N$.

因为 $1-\frac{1}{n}<f_n(x)\leqslant\|f_n\|'_p\cdot p(x)=1,\forall\ n\in N$,所以 $\lim\limits_n f_n(x)=1$.由于偶对 (X,P) 是平均强光滑的,则 $\exists\ f\in\sum_p(x)$,使得 $\lim\limits_n p'_B(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k-f)$

$=0$，这与对任意的 $f\in\sum_p(x)$，有 $p'_B(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k-f)\geqslant\varepsilon_0(\forall\ n\in N)$ 相矛盾.

充分性. 设对 $\forall\ p\in P, x\in S_p(X)$，$X$ 中含有 x 的任意 p- 正规集 B 决定的 X' 的半范数 p'_B，$\{f_n\}\subset S(X'(p))$ 满足 $\lim_n f_n(x)=1$. 则由题设条件可知，对 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $\{f_n\}\subset S(X'(p))$ 且 $f_n(x)>1-\delta$ 时，$\exists\ f\in\sum_p(x)$，使得

$$p'_B(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k-f)<\varepsilon. \tag{1}$$

由 $\lim_n f_n(x)=1$，则对上述的 δ，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，有 $f_n(x)>1-\delta$. 又因为 $\{f_n\}\subset S(X'(p))$，所以由(1)式可知，$\exists\ f\in\sum_p(x)$，使得 $p'_B(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k-f)<\varepsilon$，即 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k-f)=0$. 这就说明偶对 (X,P) 是平均强光滑的.

4 对偶关系

定理 4.1 (1) 如果偶对 (X',P') 是平均强凸的，那么偶对 (X,P) 是平均强光滑的.

(2) 如果偶对 (X',P') 是平均强光滑的，那么偶对 (X,P) 是平均强凸的.

证明 (1) 设对 $\forall\ p\in P, x\in S_p(X)$，及 X 中含有 x 的任意 p- 正规集 B 决定的 X' 的上的半范数 p'_B，当 $\{f_n\}\subset S(X'(p))$ 满足 $\lim_n f_n(x)=1$ 时，我们取 $f\in\sum_p(x)$，则 $1=f(x)\leqslant\sup_{y\in B}|f(y)|=p'_B(f)\leqslant\sup_{p(y)\leqslant 1}|f(y)|=\|f\|'_p=1$，所以有 $p'_B(f)=1$，即 $f\in S_{p'_B}(X')$. 若设 $\hat{x}$ 是 x 在 X'' 中的自然嵌入像，则 $\hat{x}(f)=f(x)=1$，于是有 $1=f(x)\leqslant\sup_{p'_B(f)\leqslant 1}|\hat{x}(f)|=\|\hat{x}\|''_{p'_B}=\sup_{\substack{\sup|\hat{y}(f)|\leqslant 1\\ y\in B}}|\hat{x}(f)|\leqslant 1$，即 $\hat{x}\in\sum_{p'_B}(f)$. 由于 $1=\|f_n\|'_p=\sup_{x\in U_p(x)}|f_n(x)|\geqslant\sup_{x\in B}|f_n(x)|=p'_B(f_n)=f_n(x)\to 1(n\to\infty)$. 所以 $p'_B(f_n)=1$，即 $\{f_n\}\subset S_{p'_B}(X'')$. 又因为 $\lim_n\hat{x}(f_n)=\lim_n f_n(x)=1$，并由偶对 (X',P') 是平均强凸的及定理 2.1 可知 $\lim_n p'_B(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_k-f)=0$. 这表明偶对 (X,P) 是平均强光滑的.

(2) 设 $\forall\ p\in P, x\in S_p(X), f\in\sum_p(x)$ 且 $\{x_n\}\subset S_p(X)$ 满足 $\lim_n f(x_n)=1$，并令 $B\triangleq\{z\in X:p(z)\leqslant 1, q(z)\leqslant q(x)+\sup_n q(x_n),\forall\ q\in P\backslash\{p\}\}$，则 B 是形如 $B\{C_p\}$ 的集合，且 $C_p=1$，故 B 是 X 中含有 x 的 p- 正规集，用 p'_B 表示由 p- 正规集 B 决定的 X' 的上的半范数. 易知 $\{x_n\}\subset B\subset U_p(X),\forall\ n\in N$.

由引理 1.1 知 $U(X'(p))=\{g\in X'(p):\|g\|'_p\leqslant 1\}$ 是 X' 中的绝对凸 w^* 紧集，再由文献[7]可知它是 $\beta(X',X)$ 有界集，即 $T_{P'}$ 是有界集. 故对任何的 $p'_{B\{C_p\}}\in P'$，有 $\sup_{h\in U(X'(p))}p'_{B\{C_p\}}(h)<+\infty$. 又令 $B'\triangleq\{g:g\in X':p'_B(g)\leqslant 1, p''_{B\{C_p\}}(g)\leqslant\sup_{h\in U(X'(p))}p'_{B\{C_p\}}(h),\forall\ p'_{B\{C_p\}}\in P'\backslash\{p'_B\}\}$，则 B' 是 X' 中含有 f 的 p'_B- 正规集. 再令 $p''_{B'}(F)\triangleq\sup_{g\in B'}|F(g)|,\forall\ F\in X''$，则 $p''_{B'}$ 是由 X' 中含有 f 的 p'_B- 正规集 B' 决定的 X'' 的上的半范数且 $U(X'(p))\subset B'\subset U_{p'_B}(X')$. 令 $\hat{x}_n$ 表示 x_n 在 X'' 中的自然嵌入像，由引理 1.1 有

$\|\hat{x}_n\|''_{p'_B}=\sup_{p'_B(g)\leqslant 1}|\hat{x}_n(g)|\geqslant\sup_{g\in B'}|\hat{x}_n(g)|\geqslant\sup_{\|g\|'_p\leqslant 1}|g(x_n)|=p(x)=1,\forall\ n\in N$，$\|\hat{x}_n\|''_{p'_B}=\sup_{p'_B(g)\leqslant 1}|\hat{x}_n(g)|\leqslant\sup_{\substack{\sup|\hat{y}(g)|\leqslant 1\\ y\in B}}|\hat{x}_n(g)|=1,\forall\ n\in N$. 所以 $\|\hat{x}_n\|''_{p'_B}=1,\forall\ n\in N$. 即 $\{\hat{x}_n\}\subset S(X''(p'_B))$，且满足 $\lim_n\hat{x}_n(f)=\lim_n f(x_n)=1$. 又因为偶对 (X',P') 是平均强光滑的，我们取 $\hat{x}\in\sum_{p'_B}(f)$，则 $\lim_n p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k-\hat{x})=0$. 再因为

$$0\leqslant p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-x)=\sup_{\|g\|_p\leqslant 1}|g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-x)|=\sup_{g\in B'}|g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-x)|=\sup_{g\in B'}|(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k-\hat{x})(g)|=p''_{B'}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k-\hat{x}),$$

从而 $\lim_n p(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-x)=0$. 这就证明偶对 (X,P) 是平均强凸的.

参考文献：

[1] Diminnie C R, White A G. Strict convexity in topological vector spaces[J]. Math Japonica, 1977, 22(1): 49-56.

[2] 国起，吴从炘. 局部凸空间的严格凸性与光滑性[J]. 东北数学，1989，5(4)：465-472.

[3] 苏雅拉图. 关于局部凸空间的几种性及光滑性[J]. 内蒙古师范大学学报，1994，4：19-23.

[4] 林尤武，魏文展，唐献秀. 局部凸空间的平均一致凸性和平均一致光滑性[J]. 广西科学，2009，16(1)：17-22.

[5] 齐淑彦，苏雅拉图. 局部凸空间的 k- 强凸性与 k- 强光滑性[J]. 应用泛函分析学报，2007，9(1)：70-76.

[6] 周少波，王茂发. Banach 空间的平均强凸性及其对偶性[J]. 湖北师范学院学报，1996，14(3)：5-11.

[7] Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces [M]. New York: MC GrnHill, 1978.

（责任编辑：尹 闯）