关于路与偶圈的6个广义 Ramsey 数的值*
Values of Six Generalized Ramsey Numbers Involved in Paths and Even Cycles

赵文飞[1],冷洪泽[2],罗海鹏[3],许晓东[3]
ZHAO Wen-fei[1],LENG Hong-ze[2],LUO Hai-peng[3], XU Xiao-dong[3]

(1.国防科学技术大学理学院,湖南长沙 410073;2.国防科学技术大学计算机学院,湖南长沙 410073;3.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan, 410073, China; 2. Computer School, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan, 410073, China; 3. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:给出求 $R(G_1,G_2,G_3)$ 的一个算法,并利用它得到6个广义 Ramsey 数的值:$R(P_4,C_4,C_4)=9$,$R(P_4,C_4,C_6)=9$,$R(P_4,C_6,C_6)=9$,$R(P_5,C_4,C_4)=11$,$R(P_5,C_4,C_6)=9$,$R(P_5,C_6,C_6)=11$.

关键词:Ramsey 数　Turán 数　边着色
中图法分类号:O157.5　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2010)02-0100-02

Abstract: An algorithm to compute the Ramsey number $R(G_1,G_2,G_3)$ is given in this note, by which the values of the following six generalized Ramsey numbers are obtained: $R(P_4,C_4,C_4)=9$, $R(P_4,C_4,C_6)=9$, $R(P_4,C_6,C_6)=9$, $R(P_5,C_4,C_4)=11$, $R(P_5,C_4,C_6)=9$, $R(P_5,C_6,C_6)=11$.

Key words: Ramsey number, Turán number, edge coloring

本文只讨论有限简单图. 对于简单图 G,G_1,G_2,G_3,如果对 G 的边任意用3种颜色(0,1,2)染色,或者 G 含有0色子图 G_1,或者 G 含有1色子图 G_2,或者 G 含有2色子图 G_3,则称 $G\to(G_1,G_2,G_3)$;$G\to(G_1,G_2)$ 可以类似定义. Ramsey 数 $R(G_1,G_2,G_3)$ 表示满足下列条件的最小正整数 n:对 n 阶完全图 K_n,有 $K_n\to(G_1,G_2,G_3)$. 对于一个3边着色的完全图 G,如果 G 中不包含0色子图 G_1,不包含1色子图 G_2,也不包含2色子图 G_3,则称图 G 为 (G_1,G_2,G_3)-图.

我们主要讨论关于路 P_4 或 P_5 与4圈或6圈的三色 Ramsey 数,其中 P_4 和 P_5 分别为阶数为4和5的路. 先结合已知结果对这类 Ramsey 数进行一些理论分析,再给出计算 (G_1,G_2,G_3) 的一个算法,它可以用来给出 $R(G_1,G_2,G_3)$ 的下界,最后利用上述算法计算得到 $R(P_4,C_4,C_4)=9$,$R(P_4,C_4,C_6)=9$,$R(P_4,C_6,C_6)=9$,$R(P_5,C_4,C_4)=11$,$R(P_5,C_4,C_6)=9$,$R(P_5,C_6,C_6)=11$.

收稿日期:2010-01-09

作者简介:赵文飞(1986-),男,硕士研究生,主要从事图论研究。

*广西自然科学基金项目(0991074);广西科学院基本科研业务费(09YJ17XX01)资助。

1 预备知识

设 $a\geqslant 4,c\geqslant b\geqslant 2$,容易知道 $R(P_a,C_{2b},C_{2c})\geqslant R(C_{2b},C_{2c})+1$,$R(P_{a+1},C_{2b},C_{2c})\geqslant R(P_a,C_{2b},C_{2c})$. 例如 $R(P_5,C_4,C_6)\geqslant R(P_4,C_4,C_6)$. 对 $c\geqslant b\geqslant 2$,文献[1]证明 $R(C_{2b},C_{2c})=2c-1+b$. 因此 $a\geqslant 4$ 时有 $R(P_a,C_{2b},C_{2c})\geqslant 2c+b$.

图 G 的 n 阶 Turán 数,记为 $t(n,G)$,是指所有不包含子图 G 的 n 阶图的最大边数. Turán 数在广义 Ramsey 数的计算中有广泛的应用. 特别是与偶圈有关的广义 Ramsey 数,往往与 Turán 数有密切的关系.

定理1[2] $t(8,C_4)=11,t(9,C_4)=13,t(10,C_4)=16,t(11,C_4)=18$.

定理2[3] $t(8,C_6)=16,t(9,C_6)=20,t(10,C_6)=21,t(11,C_6)=23$.

定理3[4] $t(8,P_4)=7,t(9,P_4)=9,t(10,P_4)=9,t(8,P_5)=12,t(9,P_5)=12,t(10,P_5)=13,t(11,P_5)=15$.

定义1 设 G 是一个不含 G_1 的图,如果对于 G 的任意两个不相邻的顶点加一条边都会产生图 G_1,则称 G 是不含 G_1 的边极大图.

由以上定理和定义不难得到如下结论：

定理 4　不含 P_4 的边极大 9 阶图是唯一的，且同构于 $3K_3$，10 阶不含 P_4 的边极大图是唯一的，且同构于 $3K_3 \cup K_1$；10 阶不含 P_5 的边极大图是唯一的，且同构于 $2K_4 \cup K_1$，10 阶不含 P_5 的边极大图是唯一的，且同构于 $2K_4 \cup K_3$.

证明　由定理 3 可知，不含 P_4 的边极大 9 阶图 G 有 9 条边，因此图 G 一定含有圈，并且只能包含 3 圈. 因为图 G 不包含 P_4，故 G 中其余顶点均不能与 3 圈中的 3 个顶点相邻，从而 G 中剩余的 6 个顶点的导出子图还有 6 条边，同理这 6 个顶点的导出子图不会是树且只能含有 3 圈，依次类推便可断定图 G 是唯一的且同构与 $3K_3$. 其余结论类似可得.

2　求三色广义 Ramsey 数的一个算法

给定 n 个顶点的图 G，对 G 的每一条边用颜色 1，2 中的一种进行着色，算法 1 将 G 和 find 设为全局变量，是用于寻找一种着色使得 G 为 (G_1,G_2,G_3)- 图.

算法 1：

```
GArrows(curlayer, G1,G2)
{
  If find=true then
     return;
  if curlayer= n * (n-1)/2 then
  {
     if G 的 1 色边导出子图含 G1 then
        return ;
     if G 的 2 色边导出子图含 G2 then
        return ;
     find = true;
     return;
  }
  对 G 的第 curlayer 条边着第 1 色;
  GArrows (curlayer+1, G1, G2);
  对 G 的第 curlayer 条边着第 2 色;
  GArrows (curlayer+1, G1, G2);
}.
```

3　主要结果

定理 5　设 $M(n,P_m)$ 是 n 阶的不含 P_m 的边极大图的集合，如果对于任意的图 $G \in M(n,P_m)$，都有 $\overline{G} \rightarrow (G_1,G_2)$，则 $R(P_m,G_1,G_2) \leqslant n$.

由定理 4，定理 5，我们可作如下计算：设 G 为 $3K_3$ 的补图，对 G 的边用颜色 1 或 2 着色，调用 GArrows$(0,C_4,C_4)$ 后，find $=$ false. 于是我们有 $R(P_4,C_4,C_4) \leqslant 9$. 类似可得以下结果：$R(P_4,C_4,C_6) \leqslant 9$，$R(P_4,C_6,C_6) \leqslant 9$，$R(P_5,C_4,C_4) \leqslant 11$，$R(P_5,C_4,C_6) \leqslant 9$，$R(P_5,C_6,C_6) \leqslant 11$. 构造 6 个 (G_1,G_2,G_3)- 图：

(P_4,C_4,C_4)- 图　　(P_4,C_4,C_6)- 图

$$\begin{pmatrix} 0&2&2&1&0&0&1&2\\ 2&0&0&2&2&1&1&1\\ 2&0&0&1&1&1&2&2\\ 1&2&1&0&2&2&0&0\\ 0&2&1&2&0&0&2&1\\ 0&1&1&2&0&0&1&2\\ 1&1&2&0&2&1&0&0\\ 2&1&2&0&1&2&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&1&1&2&2&1&0\\ 2&0&2&2&0&1&0&1\\ 1&2&0&0&1&0&1&2\\ 1&2&0&0&2&0&2&1\\ 2&0&1&2&0&2&0&1\\ 2&1&0&0&2&0&1&1\\ 1&0&1&2&0&1&0&2\\ 0&1&2&1&1&1&2&0 \end{pmatrix},$$

(P_4,C_6,C_6)- 图　　(P_5,C_4,C_6)- 图

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&2&2&1\\ 1&0&1&1&2&0&2&2\\ 1&1&0&1&2&0&2&2\\ 1&1&1&0&1&2&2&1\\ 1&2&2&1&0&0&1&2\\ 2&0&0&2&0&0&2&0\\ 2&2&2&2&1&2&0&2\\ 1&2&2&1&2&0&2&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&2&2&0\\ 1&0&0&2&1&1&0&1\\ 1&0&0&1&2&2&0&2\\ 1&2&1&0&2&2&1&0\\ 1&1&2&2&0&2&0&2\\ 2&1&2&2&2&0&2&1\\ 2&0&0&1&0&2&0&1\\ 0&1&2&0&2&1&1&0 \end{pmatrix},$$

(P_5,C_4,C_4)- 图　　(P_5,C_6,C_6)- 图

$$\begin{pmatrix} 01&1&0&1&2&0&2&0&2\\ 10&1&1&0&2&2&0&2&0\\ 11&0&2&2&0&1&1&2&2\\ 01&2&0&2&1&0&2&0&1\\ 10&2&2&0&1&2&0&1&0\\ 22&0&1&1&0&2&2&1&1\\ 02&1&0&2&2&0&1&0&1\\ 20&1&2&0&2&1&0&1&0\\ 02&2&0&1&1&0&1&0&2\\ 20&2&1&0&1&1&0&2&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01&1&0&1&1&0&2&0&2\\ 10&1&1&0&2&2&0&2&0\\ 11&0&1&1&0&1&1&1&1\\ 01&1&0&1&2&0&2&0&2\\ 10&1&1&0&2&2&0&2&0\\ 12&0&2&2&0&2&2&2&2\\ 02&1&0&2&2&0&1&0&1\\ 20&1&2&0&2&1&0&1&0\\ 02&1&0&2&2&0&1&0&1\\ 20&1&2&0&2&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

这 6 个图分别可以得出上述 6 个上界都是准确值. 综合上述的上界和下界，有：

$R(P_4,C_4,C_4) = 9$，$R(P_4,C_4,C_6) = 9$，$R(P_4,C_6,C_6) = 9$，$R(P_5,C_4,C_4) = 11$，$R(P_5,C_4,C_6) = 9$，$R(P_5,C_6,C_6) = 11$.

参考文献：

[1]　Faudree R J, Schelp R H. All Ramsey numbers for cycles in graphs[J]. Discrete Mathematics, 1974(8): 313-329.

[2]　Clapham C R J, Flockhart A, Sheehan J. Graphs without Four-cycles[J]. J Graph Theory, 1989, 13: 29-47.

[3]　Yang Yuansheng, Peter Rowlinson. On graphs without 6-cycles and related Ramsey numbers [J]. Utilitas Mathemetica, 1993, 44: 192-196.

[4]　Faudree R J, Schelp R H. Path Ramsey numbers in multicolorings[J]. J Combin Theory Ser B, 1975, 19: 150-160.

（责任编辑：尹　闯）