DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.012
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 39~42

两两 NQD阵列加权和的收敛性

Convergence of Weighted Sums for Arrays of Pairwise NQD Random Variables

付艳莉,吴群英
FU Yan-li, WU Qun-ying

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)
(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 研究两两 NQD阵列加权和的完全收敛性,获得一般双下标加权系数和的完全收敛性,推广了 Baum型 ND 条件下完全收敛性的结果.

关键词: 两两 NQD阵列 加权和 完全收敛性
中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0039-04

Abstract In this paper, the complete convergence of the weighted sums of rowwise pairwise NQD random array is studied. We prove the complete convergence for the general double index weighted partial sums, which extends the result of the complete convergence of Baum types of ND random variables.

Key Words pairwise NQD random arrays, weighted sums, complete convergence

1966年 Lehmann在文献[1]中提出 NQD的概念如下:

定义[1] 称随机变量 X 和 Y 是 NQD(Negatively Quadrant Dependent)的,若对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$,有

$$P(X < x, Y < y) \leqslant P(X < x)P(Y < y).$$

称随机序列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是两两 NQD的,若对 $\forall i \neq j$, X_i 与 X_j 是 NQD的.

不难看出两两 NQD序列是一类非常广泛的随机变量序列,后来的许多负关联列都是在此基础上繁衍出来的,如 ND序列就是它的特殊情况之一.因此,对两两 NQD序列的研究就显得更为基本,更为困难.对 ND序列的研究已经获得了许多结果,但是对两两 NQD序列的研究只有 Matula[2]获得了与独立情形一样的 Kolmogorov型强大数定理.吴群英[3]讨论了两两 NQD序列的若干收敛性质,获得与独立情形一样的 Baum和 Katz型完全收敛定理,几乎达到了独立情形的三级数定理和 Marcinkiewicz型强大数定律.

本文在 J. I. Baek和 S. T. Park[4]对 ND阵列加权和的收敛性研究的基础上,讨论两两 NQD阵列加权和的收敛性质,获得了与 ND阵列相同的结论.

1 相关引理

引理 1[5] 设随机变量 X 和 Y 是 NQD的,则

(i) $EXY \leqslant EXEY$;

(ii) $P(X \geqslant x, Y \geqslant y) \leqslant P(X \geqslant x)P(Y \geqslant y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$;

(iii) 如果 r, s 同为非降(或非增)的函数,则 $r(X)$ 和 $s(Y)$ 仍为 NQD的.

引理 2[5] 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是任意随机序列,如存在某随机变量 X 及正常数 c,使对 $\forall x > 0$ 及 $n \geqslant 1$,有 $P(|X_n| \geqslant x) \leqslant cP(|X| \geqslant x)$,则对 $\forall U > 0$, $\forall t > 0$ 有

$$E|X_n|^U I_{(|X_n| \leqslant t)} \leqslant c(E|X|^U I_{(|X| \leqslant t)} + t^U P(|X| > t)),$$

$$E|X_n|^U I_{(|X_n| > t)} \leqslant cE|X|^U I_{(|X| > t)}.$$

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_{ni}; n \geqslant 1, i \geqslant 1\}$ 是两两 NQD随机阵列, $EX_{ni} = 0$,存在某一随机变量 X 和正常数 c,使

收稿日期: 2009-05-26
作者简介: 付艳莉(1981-),女,硕士研究生,主要从事概率极限理论研究.

对所有的 n,i 和 $x\geqslant 0$,有 $P(|X_{ni}|>x)\leqslant cP(|X|>x)$.假设 $U\geqslant -1$,$\{a_{ni};n\geqslant 1,i\geqslant 1\}$ 是常数阵列,并且满足

$$\sup_{i\geqslant 1}|a_{ni}| = O(n^{-r}),\text{对 } r>0, \qquad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}| = O(n^{T}),\text{对 } T\in[0,r). \qquad (2.2)$$

(i) 若 $T+U+1>0$,且存在 $W>0$,满足 $1+\frac{T}{r}<W\leqslant 2$,取 $s=\max(1+\frac{1+T+U}{r},W)$,有 $E|X|^{s}<\infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}P(|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}X_{ni}|>X)<\infty,\ \forall X>0; \qquad (2.3)$$

(ii) 若 $T+U+1=0$,且 $E(|X|\log(1+|X|))<\infty$,则(2.3)式也成立.

定理 2 设 $\{k_n;n\geqslant 1\}$ 是正整数序列,$\{X_{ni};1\leqslant i\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是两两NQD随机阵列,$EX_{ni}=0$,存在某一随机变量 X 和正常数 c,使得对所有的 $1\leqslant i\leqslant k_n,n\geqslant 1$ 和 $x>0$,有 $P(|X_{ni}|>x)\leqslant cP(|X|>x)$,且 $EX^2<\infty$.又假设 $\{a_{ni};1\leqslant i\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是实数阵列,对某 $U\geqslant 0$,满足 $\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}^2=O(\frac{1}{k_n^{U+2}})$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{U}P(|\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}X_{ni}|>X)<\infty,\ \forall X>0. \qquad (2.4)$$

注 定理1推广了文献[4]中定理3.1,定理2不但推广了文献[4]中定理3.2,而且减弱了该定理中矩条件的限制,获得了同样的结论.

定理1的证明 (i) 不失一般性,假设 $a_{ni}>0$,令

$$X'_{ni}=-I(a_{ni}X_{ni}<-1)+a_{ni}X_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|\leqslant 1)+I(a_{ni}X_{ni}>1).$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}P(|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}X_{ni}|>X)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{i=1}^{\infty}P(|a_{ni}X_{ni}|>1)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}P(|\sum_{i=1}^{\infty}X'_{ni}|\geqslant\frac{X}{2})\triangleq I_1+I_2,$$

因此,要证明(2.3)式,只需证明 $I_1<\infty$ 和 $I_2<\infty$.由(2.1)式和(2.2)式,不失一般性,可以假设

$$\sup_{i\geqslant 1}|a_{ni}|=n^{-r},\ \sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|=n^{T},$$

记

$$I_{nk}=\{i;(nk)^{r}\leqslant|a_{ni}|^{-1}=|b_{ni}|<(n(k+1))^{r}\},\ k\geqslant 1,n\geqslant 1. \qquad (2.5)$$

由(2.5)式知,对所有的 $n\geqslant 1$,有 $\bigcup_{j=1}I_{nj}=\mathbf{N}$;其中 $\mathbf{N}$ 是正整数集.又对所有的 $j\geqslant 1,n\geqslant 1$,记

$$\sum_{j=1}^{k}\# I_{nj}=\#\{i\in\mathbf{N};\ b_{ni}<(n(k+1))^{r}\}\triangleq\# A_{nk},$$

其中 $\# A$ 表示集合 A 中元素的数目.所以,对所有的 $k\geqslant 1,n\geqslant 1$,由(2.5)式得

$$n^{T}\geqslant\sum_{i\in A_{nk}}|a_{ni}|=\sum_{i\in A_{nk}}\frac{1}{|b_{ni}|}\geqslant\frac{\# A_{nk}}{(n(k+1))^{r}},$$

因此,有

$$\# A_{nk}\leqslant n^{T+r}(k+1)^{r},\ \sum_{j=1}^{k}\# I_{nj}\triangleq\# A_{nk}\leqslant n^{T+r}(k+1)^{r}. \qquad (2.6)$$

首先证明 $I_1<\infty$,由(2.6)式以及定理1的条件,有

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{i=1}^{\infty}P(|a_{ni}X_{ni}|>1)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{i=1}^{\infty}P(|X_{ni}|>b_{ni})\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{i=1}^{\infty}P(|X|\geqslant b_{ni})\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{j=1}^{\infty}(\# I_{nj})P(|X|\geqslant(nj)^{r})\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{j=1}^{\infty}(\# I_{nj})\sum_{k=nj}^{\infty}P(k^{r}\leqslant|X|<(k+1)^{r})\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}\sum_{k=n}^{\infty}n^{T+r}(\frac{k}{n}+1)^{r}P(k\leqslant|X|^{1/r}<(k+1))\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}n^{T+r}n^{-r}\sum_{k=n}^{\infty}k^{r}P(k\leqslant|X|^{1/r}<k+1)\leqslant$$
$$c\sum_{k=1}^{\infty}k^{r}P(k\leqslant|X|^{1/r}<k+1)\sum_{n=1}^{k}n^{T+U}\leqslant$$
$$c\sum_{k=1}^{\infty}k^{T+U+r+1}P(k\leqslant|X|^{1/r}<k+1)\leqslant$$
$$cE|X|^{\frac{T+U+1}{r}+1}<\infty.$$

下面证明 $I_2<\infty$,对所有的 $V>0,b>0$,由引理2,知 $E|X_{ni}|^{V}I_{(|X_{ni}|>b)}\leqslant cE|X|^{V}I_{(|X|>b)}$.因此,由条件 $1+\frac{T}{r}<W\leqslant 2$,结合 $s=\max(1+\frac{1+T+U}{r},W)$ 的取法得 $E|X|^{1+\frac{T}{r}}<\infty$,又 $EX_{ni}=0$,则

$$\sum_{i=1}^{\infty}|EX'_{ni}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(|a_{ni}X_{ni}|>1)+\sum_{i=1}^{\infty}E|a_{ni}X_{ni}|I_{(|a_{ni}X_{ni}|>1)}\leqslant$$
$$2\sum_{i=1}^{\infty}E|a_{ni}X_{ni}|^{1+\frac{T}{r}}I_{(|a_{ni}X_{ni}|>1)}\leqslant$$
$$c\sup_{i\geqslant 1}a_{ni}^{T/r}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}E|X|^{1+T/r}I_{(|X|>1/a_{ni})}\leqslant$$
$$cn^{-Tr/r}n^{T}E|X|^{1+T/r}I_{(|X|>n^{r})}=cE|X|^{1+T/r}I_{(|X|>n^{r})}\to 0,\ n\to\infty. \qquad (2.7)$$

由(2.7)式,为了证明 $I_2<\infty$,我们只需证明

$$I_2^{*}\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}n^{U}P(|\sum_{i=1}^{\infty}(X'_{ni}-EX'_{ni})|\geqslant\frac{X}{2})<\infty,$$

$\forall \varepsilon > 0$.

由引理1的(iii)知，对每一个固定的 $n \geq 1$，$\{X'_{ni}; i \geq 1\}$ 仍然是两两NQD的随机序列，由引理1的(i)，有

$$I_2^* \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} E|X'_{ni}|^2.$$

为此，只要证明 $I_2^* < \infty$ 即可. 由引理2，对 $\delta \geq 1$，有

$$E|a_{ni}X_{ni}|^{\delta} I_{(|a_{ni}X_{ni}| \leq 1)} \leq c(E|a_{ni}X|^{\delta} I_{(|a_{ni}X| \leq 1)}) + P(|a_{ni}X| > 1). \qquad (2.8)$$

由 $s = \max(1 + \frac{1+\alpha+\beta}{r}, \gamma)$ 的取法知，$1 + \frac{\alpha}{r} < \gamma \leq s$，因此，得 $E|X|^{\gamma} < \infty$. 又由(2.8)式，得

$$\sum_{i=1}^{\infty} E|X'_{ni}|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(|a_{ni}X_{ni}| > 1) + \sum_{i=1}^{\infty} E|a_{ni}X_{ni}|^2 I_{(|a_{ni}X_{ni}| \leq 1)} \leq c\sum_{i=1}^{\infty} P(|a_{ni}X| > 1) + c\sum_{i=1}^{\infty} E|a_{ni}X|^2 I_{(|a_{ni}X_{ni}| \leq 1)} \leq c\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^{\gamma} E|X|^{\gamma} \leq cn^{-r[\gamma - (1+\alpha/r)]}.$$

因此，选择充分大的 M，使得

$$\beta - r[\gamma - (1+\alpha/r)]M < -1,$$

则有

$$I_2^* \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta - r[\gamma - (1+\alpha/r)]M} < \infty.$$

从而(i)得证.

(ii) 从(i)的证明过程得知，对于(ii)只需证明 $I_1 < \infty$ 和 $I_2^* < \infty$.

当 $\alpha + \beta + 1 = 0$ 时，由定理1的条件，得

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} P(|a_{ni}X_{ni}| > 1) \leq c\sum_{i=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} P(|X| \geq 1/a_{ni}) \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} E|X| I_{(|X| \geq 1/a_{ni})} \leq c\sum_{i=1}^{\infty} n^{\alpha+\beta} E|X| I_{(|X| \geq n^r)} \leq c\sum_{k=1}^{\infty} E|X| I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} \sum_{n=1}^{k} n^{-1} \leq c\sum_{k=1}^{\infty} (\log k) E|X| I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} \leq cE(|X| \log(1 + |X|)) < \infty.$$

又由(2.8)式，得

$$I_2^* \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} E|X'_{ni}|^2 \leq I_1 + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} E|a_{ni}X_{ni}|^2 I_{(|a_{ni}X_{ni}| \leq 1)} \leq c + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} E|a_{ni}X|^2 I_{(|a_{ni}X| \leq 1)} \leq c +$$

$$c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(nj)^{-2r} E|X|^2 I_{(|X| \leq (n(j+1))^r)} \leq c + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(nj)^{-2r} \cdot \sum_{0 \leq k \leq n(j+1)} E|X|^2 I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} \leq c + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(nj)^{-2r} \sum_{k=0}^{2n} E|X|^2 I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} + c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} (\sharp I_{nj})(nj)^{-2r} \sum_{k=2n+1}^{n(j+1)} I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} \triangleq c + I_3 + I_4.$$

对于 I_3，由 $E(|X| \log(1 + |X|)) < \infty$，得 $E|X| < \infty$，因此，有

$$I_3 \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} n^{\alpha - r} \sum_{k=0}^{2n} E|X|^2 I_{(k^r \leq |X| < (k+1)^r)} \leq c + c\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[\frac{k}{2}]}^{\infty} n^{\beta+\alpha-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c + c\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta+\alpha+1-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c + cE|X|^{1+(\alpha+\beta+1)/r} = c + cE|X| < \infty.$$

最后，对于 I_4，有

$$I_4 \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \sum_{j \geq \frac{k}{n}-1} (\sharp I_{nj})(nj)^{-2r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{k=2n+1}^{\infty} n^{\alpha-r} \left(\frac{k}{n}\right)^{-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+\beta} \sum_{k=2n+1}^{\infty} k^{-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c + c\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{[k/2]} n^{\alpha+\beta} k^{-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c + c\sum_{k=2}^{\infty} k^{-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \sum_{n=1}^{k} n^{-1} \leq c + c\sum_{k=2}^{\infty} (\log k) k^{-r} E|X|^2 I_{(k \leq |X|^{1/r} < k+1)} \leq c + cE(|X| \log(1 + |X|)) < \infty.$$

综上，定理1证明完毕.

定理2的证明 令 $a_{ni}^{+} = \max(a_{ni}, 0)$，$a_{ni}^{-} = \max(-a_{ni}, 0)$，则 $a_{ni} = a_{ni}^{+} - a_{ni}^{-}$. 因此要证明(2.4)式，只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\beta} P(|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni}| > \varepsilon) < \infty, \ \forall \varepsilon > 0, \qquad (2.9)$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\beta} P(|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{-} X_{ni}| > \varepsilon) < \infty, \ \forall \varepsilon > 0, \qquad (2.10)$$

因为(2.10)式的证明过程与(2.9)式的类似，所以我们只证明(2.9)式. 要证明(2.9)式，我们只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} P\Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni} > \varepsilon\Big) < \infty, \forall \varepsilon > 0, \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} P\Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni} < -\varepsilon\Big) < \infty, \forall \varepsilon > 0. \quad (2.12)$$

首先证明(2.11)式.由引理1(iii)得,$\{a_{ni}^{k} X_{ni};1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$仍然是两两NQD随机阵列,又由Markov不等式以及引理1的(i),定理2的条件$\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 = O(\frac{1}{k_n^{\alpha+2}})$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} P\Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni} > \varepsilon\Big) \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} \varepsilon^{-2} E\Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni}\Big)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^{k_n} (a_{ni}^{+})^2 E X_{ni}^2 \leqslant$$

$$c\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} \sum_{i=1}^{k_n} (a_{ni}^{+})^2 \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} \sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^2 \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} \frac{1}{k_n^{\alpha+2}} =$$

$$c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

将上面证明过程中的X_{ni}用$-X_{ni}$替换,又由引理1的(iii)知,$\{a_{ni}^{+}(-X_{ni});1 \leqslant i \leqslant k, n \geqslant 1\}$仍然是两两NQD随机阵列,则对$\forall \varepsilon > 0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} P\Big(\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}^{+} X_{ni} < -\varepsilon\Big) < \infty.$$

由此,(2.9)式得到证明.综上所述,定理2证明完毕.

注 2.1 设$\{k_n;n \geqslant 1\}$是正整数序列,$\{X_{ni};1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$是两两NQD随机阵列,且$EX_{ni} = 0$,存在某一随机变量$X$和正常数$c$,使得对所有的$1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1$和$x > 0$,有$P(|X_{ni}| > x) \leqslant cP(|X| > x)$,$EX^2 < \infty$.假设$\{b_{ni};1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$是实数阵列,满足$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} b_{ni}^2 < \infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{\alpha} P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} X_{ni}\Big| > \varepsilon \log k_n\Big) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

证明 令$a_{ni} = \frac{b_{ni}}{\log k_n}$,由定理2的证明过程,即可得以证明.

参考文献:

[1] Lehmann E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Stat, 1966, 43: 1137-1153.

[2] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett, 1992, 15: 209-213.

[3] 吴群英.两两NQD列的收敛性质[J].数学学报,2002,45(3): 617-624.

[4] Baek J I, Park S T. Convergence of weighted sums for arrays of negatively dependent random variables and its applications[J]. Theoretical Probability, 2008, 37(1): 73-80.

[5] 吴群英.混合序列的概率极限理论[M].北京:科学出版社,2006.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第38页 Continue from page 38)

表 1 数值实验结果

Table 1 Nunerical results

Problem	N	BTR (NIT/NF/NG)	Algorithm 1 (NIT/NF/NG)
Extended Rosenbrock	32	42/43/43	42/43/43
	64	43/44/44	43/44/44
	128	46/47/47	42/43/43
	256	49/50/50	49/50/50
	512	46/47/47	46/47/47
	1024	52/53/53	52/53/53
	2048	57/58/58	51/52/52
Extended penaltyl	32	141/142/142	122/123/123
	64	116/117/117	116/117/117
	128	124/125/125	120/121/121
	256	122/123/123	122/123/123
	512	133/134/134	132/133/133
	1024	160/161/161	155/156/156
	2048	173/174/174	173/174/174

参考文献:

[1] Conn A R, Gould N I M, Toint Ph L. Trust region methods[M]. Philadelphia: SIAM, 2000.

[2] 李正峰,邓乃扬.一类新的非单调信赖域算法及其收敛性[J].应用数学学报,1999,22(3): 458-465.

[3] 缪卫华,孙文瑜.一个解无约束优化问题的过滤信赖域方法[J].高等学校计算数学学报,2007(3): 88-89.

[4] Gould N I M, Sainvitu C, Toint Ph L. A filter-trust-region method for unconstrained Optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 16(2): 341-357.

[5] Mo Jiangtao, Zhang Kecun, Wei Zengxin. A nonmonotone trust region method for unconstrained optimization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 171: 371-384.

[6] 姚升保,施保昌,彭叶辉.一类带线搜索的非单调信赖域算法[J].数学杂志,2003,23(3): 290-294.

(责任编辑:韦廷宗)