DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.008
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 22~26, 31

一类时滞脉冲微分方程的概周期解*

On the Existence of Almost Periodic Solutions for a Kind of Delay Differential Equations with Impulses

林远华[1], 冯春华[2]
LIN Yuan-hua[1], FENG Chun-hua[2]

(1.河池学院,广西宜州 546300; 2.广西师范大学,广西桂林 541004)
(1. Hechi University, Yizhou, Guangxi, 546300, China; 2. Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用锥上不动点定理,研究一类非自治时滞脉冲微分方程的概周期解,给出该系统存在概周期解的一组充分条件.

关键词: 时滞脉冲微分方程 锥上不动点定理 概周期解 存在性
中图法分类号: O175.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0022-05

Abstract With respect to the almost periodic solutions to a kind of delay differential equations with impulses, a study is made on their existence. Sufficient conditions are given to the almost periodic solutions of these equations for ensuring their existence by means of fixed point theorem.

Key words impulsive delay differential equation, fixed point theorem on the cone, almost periodic solution, existence

对于无脉冲 Lasota-Wazewska方程

$$x'(t) = -e(t)x(t) + p(t)f(x(t-f)), \qquad (1)$$

文献 [1]运用指数二分性,把方程(1)与非线性发展系统联系在一起,从动力系统的角度研究方程(1)概周期解的存在性、稳定性和吸引性.文献 [2]运用压缩映射的不动点定理考虑具有脉冲时滞效应的 Lasota-Wazewska模型

$$\begin{cases} x'(t) = -T(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} U_i(t)e^{-V_i(t)x(t-h)}, \\ \quad t \neq f_k,\ f_k < f_{k+1}; \\ \Delta x(f_k) = x(f_k^+) - x(f_k^-) = T_k(x(f_k)) + \\ \quad g_k,\ t = f_k, k \in Z \end{cases} \qquad (2)$$

概周期解的存在性. 文献 [3]把有脉冲 Lasota-Wazewska周期系统

$$\begin{cases} x'(t) = -T(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} U_i(t)e^{-V_i(t)x(t-n_i k)}, \\ \quad t \neq f_k; \\ \Delta x(f_k) = x(f_k^+) - x(f_k^-) = T_k(x(f_k)), \\ \quad t = f_k, k \in Z \end{cases} \qquad (3)$$

转化为无脉冲系统,并利用 Brouwer不动点定理研究系统周期解的存在唯一性.文献 [4]研究一类具有脉冲效应的 Nicholso果蝇模型周期解的存在性和全局吸引性.本文利用锥上不动点定理讨论一类非自治时滞脉冲系统概周期解的存在性,并再把上述 Lasota-Wazewska模型作为一个具体例子,在不同于文献 [2]的限制条件下,得到系统(2)存在概周期解的一组充分条件.有关脉冲方程的理论,参见文献 [5~8].

1 预备知识

定义 1[9] 设 X是一个实 Banach空间,K是 X中的非空凸闭集,如果 K满足

(i) $x \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$;

(ii) $x \in K, -x \in K \Rightarrow x = 0$,

则称 K是 X中的一个锥.

定义 2[7] 序列 $\{f_k\} \in B$称为概周期的,如果对

收稿日期: 2009-07-09
修回日期: 2009-09-03
作者简介: 林远华(1964-),男,副教授,主要从事微分方程研究。
* 国家自然科学基金项目(10961005),广西教育厅科研项目(200911LX399)资助。

任给的 $\varepsilon>0$,存在 $k,q\in Z$(Z全体整数)使得 $|t_{k+q}-t_k|<\varepsilon$.

定义 3[7] 设 PC 是分段连续具有第一类间断点 t_k 的集合.函数 $\varphi\in PC$ 称为概周期的,如果

(a) $\{t_k\}\in B$ 是概周期的;

(b) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在实数 $\delta>0$ 使得当 t' 和 t'' 属于 $\varphi(t)$ 的同一连续区间且满足不等式 $|t'-t''|<\delta$ 时,有 $|\varphi(t')-\varphi(t'')|<\varepsilon$;

(c) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在相对致密集 T,使得对 $l\in T$ 且满足 $|t-t_k|>\varepsilon$ 的所有 $t\in R$ 时,有 $|\varphi(t+l)-\varphi(t)|<\varepsilon$.

定理 A[10] 设 X 是一实 Banach 空间,K 是 X 中的一个锥,Ω_1,Ω_2 是 X 中的开子集,并且 $0\in\Omega_1$, $\bar\Omega_1\subset\Omega_2$, $\Phi: K\cap(\bar\Omega_2\setminus\Omega_1)\to K$ 全连续,若满足

(i) 对 $x\in K\cap\partial\Omega_1$,有 $\|\Phi x\|\leqslant\|x\|$;

(ii) 对 $x\in K\cap\partial\Omega_2$, $\lambda>0$,存在 $\psi\in K\setminus\{0\}$,使得 $x\neq\Phi x+\lambda\psi$,

则 Φ 在 $K\cap(\bar\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中必存在不动点.

为了叙述方便,记 $\bar g=\sup_{t\in R}g(t)$, $\underline{g}=\inf_{t\in R}g(t)$.令 $PC(R)=\{x(t);x(t)$ 在 $t\neq t_k$ 处连续,在 $t=t_k$ 处 $x(t_k^+),x(t_k^-)$ 存在且 $x(t_k^-)=x(t_k)\}$.集合 $B=\{t_k;t_k\in R,t_k<t_{k+1},k\in Z,\lim_{k\to\pm\infty}t_k=\pm\infty\}$.再记 $X=\{x(t);x\in PC(R),x(t)$ 是概周期函数$\}$,定义范数 $\|x\|=\sup_{t\in R}\{|x(t)|,x\in X\}$,显然 X 是一个 Banach 空间.

2 主要结果

考虑具有脉冲效应的概周期系统

$$\begin{cases} x'(t)=-a(t)x(t)+f(t,x(t-\tau)),\\ \qquad t\neq t_k,t\neq t_k+\tau,t_k<t_{k+1};\\ \Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)=I_k(x(t_k)). \end{cases} \quad (4)$$

对于系统(4),假设下述条件成立:

(H_1) $a(t)$ 是不恒为常数的定正概周期函数,即 $0<\underline{a}<a(t)<\bar a$;

(H_2) $f(t,v)$ 关于 t 对 v 是一致概周期定正函数,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $l>0$ 使得对任意的 $v\in R$,当 $t\neq t_k$ 时有 $|f(t+l,v)-f(t,v)|<\varepsilon$.同时还假定对 $t\neq t_k$, $f(t,v)$ 连续有界,即 $|f(t,v)|\leqslant M$.此外 $f(t,v)$ 还满足 Lipschitz 条件,即 $|f(t,v)-f(t,u)|\leqslant L_1|v-u|$;

(H_3) $I_k\in C(R,R)$ 是概周期的,即存在正整数 q,对任意 $\varepsilon>0$ 和 $x\in R$,当 $t=t_k$ 时有 $|I_{k+q}(x)-I_k(x)|<\varepsilon$.同时还假定 I_k 有界,即 $|I_k(x)|\leqslant N$.此外 I_k 还满足 Lipschitz 条件,即 $|I_k(x)-I_k(y)|\leqslant L_2|x-y|$;

(H_4) t_k 满足 $\inf_{k\in Z}|t_{k+1}-t_k|=\theta>0$, $t_{k-1}+\tau<t_k$.此外对上述的 $\varepsilon>0$ 同样存在正整数 q,使得 $|t_{k+q}-t_k|<\varepsilon$.

引理 1 $\forall t\in R$,令

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_s^t a(u)\mathrm{d}u)f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}e^{-\int_{t_k}^{t}a(u)\mathrm{d}u}I_k(x(t_k)), \quad (5)$$

则 $x(t)$ 满足系统(4).

证明 当 $t\neq t_k$ 时,由(5)式有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_s^t a(u)\mathrm{d}u)f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}e^{-\int_{t_k}^{t}a(u)\mathrm{d}u}I_k(x(t_k)) = \int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_s^0 a(u)\mathrm{d}u-\int_0^t a(u)\mathrm{d}u)f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}e^{-\int_{t_k}^{0}a(u)\mathrm{d}u-\int_0^t a(u)\mathrm{d}u}I_k(x(t_k)) = \exp(-\int_0^t a(u)\mathrm{d}u)[\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_s^0 a(u)\mathrm{d}u)f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}e^{-\int_{t_k}^{0}a(u)\mathrm{d}u}I_k(x(t_k))].$$

两边同时乘以 $e^{\int_0^t a(u)\mathrm{d}u}$,上式变为

$$e^{\int_0^t a(u)\mathrm{d}u}x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{\int_0^s a(u)\mathrm{d}u}f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_k<t}e^{\int_0^{t_k}a(u)\mathrm{d}u}I_k(x(t_k)). \quad (6)$$

对(6)式微分得

$$e^{\int_0^t a(u)\mathrm{d}u}[a(t)x(t)+x'(t)]=e^{\int_0^t a(u)\mathrm{d}u}f(t,x(t-\tau)), \quad (7)$$

移项得

$$x'(t)=-a(t)x(t)+f(t,x(t-\tau)).$$

当 $t=t_k$ 时,

$$x(t_k^+)e^{\int_0^{t_k^+}a(u)\mathrm{d}u}=\int_{-\infty}^{t_k^+}e^{\int_0^s a(u)\mathrm{d}u}f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_i<t_k^+}e^{\int_0^{t_i}a(u)\mathrm{d}u}I_i(x(t_i))=\int_{-\infty}^{t_k^+}e^{\int_0^s a(u)\mathrm{d}u}f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_i\leqslant t_k}e^{\int_0^{t_i}a(u)\mathrm{d}u}I_i(x(t_i)), \quad (8)$$

$$x(t_k^-)e^{\int_0^{t_k^-}a(u)\mathrm{d}u}=\int_{-\infty}^{t_k^-}e^{\int_0^s a(u)\mathrm{d}u}f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s+\sum_{t_i<t_k^-}e^{\int_0^{t_i}a(u)\mathrm{d}u}I_i(x(t_i)).$$

注意到

$$e^{\int_0^{t_k^-}a(u)\mathrm{d}u}=e^{\int_0^{t_k}a(u)\mathrm{d}u},$$

$$\int_{-\infty}^{t_k^-}e^{\int_0^s a(u)\mathrm{d}u}f(s,x(s-\tau))\mathrm{d}s=$$

$$\int_{-\infty}^{f_k} e^{\int_0^s T(u)du} f(s, x(s - f))ds,$$

从而有

$$x(f_k^-)e^{\int_0^{f_k} T(u)du} = \int_{-\infty}^{f_k} e^{\int_0^s T(u)du} f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_i < f_k} e^{\int_0^{f_k} T(u)du} I_i(x(f_i)). \quad (9)$$

又由积分的性质知

$$\int_{-\infty}^{f_k^+} e^{\int_0^s T(u)du} f(s, x(s - f))ds - \int_{-\infty}^{f_k} e^{\int_0^s T(u)du} f(s, x(s - f))ds = 0.$$

于是由(8)式和(9)式,我们有

$$x(f_k^+)e^{\int_0^{f_k^+} T(u)du} - x(f_k^-)e^{\int_0^{f_k^-} T(u)du} = e^{\int_0^{f_k} T(u)du}[x(f_k^+) - x(f_k^-)] = \sum_{f_i \leqslant f_k} e^{\int_0^{f_i} T(u)du} I_i(x(f_i)) - \sum_{f_i < f_k} e^{\int_0^{f_i} T(u)du} I_i(x(f_i)) = e^{\int_0^{f_k} T(u)du} I_k(x(f_k)). \quad (10)$$

(10)式两边同除以 $e^{\int_0^{f_k} T(u)du}$,得

$$\Delta x(f_k) = x(f_k^+) - x(f_k^-) = I_k(x(f_k)). \quad (11)$$

综上所述,(5)式满足系统(4).

现在记 $a^* = \sup_{t \in R}\{\exp(-\int_s^t T(u)du)\}$, $a_* = \inf_{t \in R}\{\exp(-\int_s^t T(u)du)\}$.

定义锥 $K = \{x \in X: x(t) > 0, \| x(t) \| \geqslant e\| x \|\}$,其中 $0 < e < \frac{a_*}{a^*}$,由于 $T(t)$ 满足条件(H_1),故 $e < 1$.再定义算子

$$H(x(t)) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_k < t} e^{-\int_{f_k}^{t} T(u)du} I_k(x(f_k)). \quad (12)$$

引理 **2** $H(K) \subset K$

证明 对 $\forall x \in K$,有

$$\| H(x)(t) \| = \| \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) \cdot I_k(x(f_k)) \| \leqslant a^* \{ | \int_{-\infty}^{t} f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_k < t} I_k(x(f_k)) | \}. \quad (13)$$

$$\| H(x)(t) \| = \| \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x(f_k)) \| \geqslant a_* \{ | \int_{-\infty}^{t} f(s, x(s - f))ds + \sum_{f_k < t} I_k(x(f_k)) | \}. \quad (14)$$

由(13),(14)式知 $\| H(x)(t) \| \geqslant \frac{a_*}{a^*} \| Hx \| > e\| Hx \|$,即 $H(K) \subset K$.

引理 **3** 算子 $H: K \to K$ 是全连续算子.

证明 假设 $x_n \in K$,则由 x_n 的有界性知,存在 x_n 的子列 x_{n_j},使得 $x_{n_j} \to x_0$,于是

$$| (Hx_{n_j})(t) - (Hx_0)(t) | \leqslant | \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x_{n_j}(s - f))ds - \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x_0(s - f))ds | + | \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_{n_j}(f_k)) - \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) | \leqslant \int_{-\infty}^{t} e^{-T(t-s)} | f(s, x_{n_j}(s - f)) - f(s, x_0(s - f)) | ds + \sum_{f_k < t} e^{-T(t-f_k)} | I_k(x_{n_j}(f_k)) - I_k(x_0(f_k)) | \leqslant \frac{L_1}{T} | x_{n_j} - x_0 | + \frac{L_2}{1 - e^{-\theta T}} | x_{n_j} - x_0 |. \quad (15)$$

因为 $x_{n_j} \to x_0$,故 $| (Hx_{n_j})(t) - (Hx_0)(t) | \to 0$,从而 H 连续.利用 $T(t)$ 和 $f(t, v)$ 的概周期性,对任意 $X > 0$,结合微分中值定理,我们有

$$| (Hx_0)(t + l) - (Hx_0)(t) | = | \int_{-\infty}^{t+l} \exp(-\int_s^{t+l} T(u)du) f(s, x_0(s - f))ds - \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x_0(s - f))ds + \sum_{f_k < t+l} \exp(-\int_{f_k}^{t+l} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) - \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) | \leqslant | \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_{s+l}^{t+l} T(u)du) f(s + l, x_0(s + l - f))ds - \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_{s+l}^{t+l} T(u)du) f(s, x_0(s + l - f))ds | + | \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_{s+l}^{t+l} T(u)du) f(s, x_0(s + l - f))ds - \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t T(u)du) f(s, x_0(s - f))ds | + | \sum_{f_k < t+l} \exp(-\int_{f_k}^{t+l} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) - \sum_{f_k < t+l} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) | + | \sum_{f_k < t+l} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) - \sum_{f_k < t} \exp(-\int_{f_k}^{t} T(u)du) I_k(x_0(f_k)) | \leqslant \frac{2X}{T} + \frac{2L_2 X}{1 - e^{-\theta T}}. \quad (16)$$

由于 $X > 0$ 充分小,故 $\frac{2X}{T} + \frac{2L_2 X}{1 - e^{-\theta T}}$ 也充分小,这说明 $x_0 \in K$.取有界集 $D \subset K$,对于 $t \in R$,则有

$$|(\Phi x)(t)| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda(u)\,du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds\right| + \left|\sum_{\tau_k<t} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t}\lambda(u)\,du\right) I_k(x(\tau_k))\right| \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\underline{\lambda}(t-s)} |f(s,x(s-\tau))|\,ds + \sum_{\tau_k<t} e^{-\underline{\lambda}(t-\tau_k)} |I_k(x(\tau_k))| \leqslant \frac{M}{\underline{\lambda}} + \frac{N}{1-e^{-\theta\underline{\lambda}}}.$$

由此可见 $|(\Phi x)(t)|$ 有界,从而 $\Phi(D)$ 一致有界.

下面证明 Φ 是等度连续的.取 $x\in D$,对充分小的 $\varepsilon>0$,当 $t_2-t_1<\varepsilon$(不妨设存在某个 k,$\tau_k<t_1<t_2<\tau_{k+1}$)时,在区间 $(-\infty,t_1)$ 和区间 $(-\infty,t_2)$ 上的脉冲点个数是可数的.从而有

$$\sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_1}\lambda(u)\,du\right) I_k(x(\tau_k)) = \sum_{\tau_k<t_1} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_1}\lambda(u)\,du\right) I_k(x(\tau_k)),$$

因此

$$\begin{aligned}
&|(\Phi x)(t_2)-(\Phi x)(t_1)| = \\
&\left|\int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_2}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds - \int_{-\infty}^{t_1} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds + \right.\\
&\left.\sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_2}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k)) - \sum_{\tau_k<t_1} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k))\right| = \\
&\left|\int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_2}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds - \int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds + \right.\\
&\int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds - \int_{-\infty}^{t_1} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right) f(s,x(s-\tau))\,ds + \\
&\sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_2}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k)) - \sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_1}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k)) + \\
&\left.\sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_1}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k)) - \sum_{\tau_k<t_1} \exp\left(-\int_{\tau_k}^{t_1}\lambda(u)du\right) I_k(x(\tau_k))\right| \leqslant \\
&M\int_{-\infty}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right)\left[\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right)-1\right]ds + \int_{t_1}^{t_2} \exp\left(-\int_{s}^{t_1}\lambda(u)du\right)|f(s,x(s-\tau))|\,ds + \\
&\sum_{\tau_k<t_2} \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)du\right)|I_k(x(\tau_k))| \leqslant \varepsilon\left(\frac{M}{\underline{\lambda}} + M + \frac{N}{1-e^{-\theta\underline{\lambda}}}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

因为 ε 任意小,因此 $\varepsilon\left(\frac{M}{\underline{\lambda}}+M+\frac{N}{1-e^{-\theta\underline{\lambda}}}\right)$ 也任意小,所以 $|(\Phi x)(t_2)-(\Phi x)(t_1)|$ 充分小,故 Φ 等度连续,从而 Φ 全连续[9].记

$$\underline{D} = \lim_{v\to 0}\inf_{t\in R}\frac{f(t,v)}{\lambda(t)v},\quad \overline{D} = \lim_{v\to\infty}\sup_{t\in R}\frac{f(t,v)}{\lambda(t)v}, \tag{18}$$

$$\underline{I} = \lim_{x\to 0}\inf_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}\frac{I_k(x)}{x},\quad \overline{I} = \lim_{x\to\infty}\sup_{t\in R}\sum_{\tau_k<t}\frac{I_k(x)}{x}, \tag{19}$$

其中 $v = x(t-\tau)$.

定理 1 假设以下条件满足:

(Ⅰ) $\overline{D} + a^*\overline{I} < 1$;

(Ⅱ) $\underline{D} + a_*\underline{I} > 1$,

则系统(4)至少存在一个概周期解.

证明 由条件(Ⅰ)知 $\overline{D}+a^*\overline{I}<1$,则可以找到一个正的常数 $\eta_0>0$,使得

$$0 < \eta_0 < \frac{1-(\overline{D}+a^*\overline{I})}{a^*+1}.$$

由(17)式与(18)式知,存在一个常数 $q>0$,当 $\sigma q\leqslant v, x\leqslant q$ 时,

$$f(t,v)\leqslant(\overline{D}+\eta_0)\lambda(t)v,\quad a^*\sum_{\tau_k<t}I_k(x)\leqslant a^*(\overline{I}+\eta_0)x.$$

令 $\Omega_1=\{x\in X: \|x\|<q\}$,如果 $x,v\in K$ 且 $\|x\|=\|v\|=q$,即 $x,v\in\partial\Omega_1$,那么 $\sigma q\leqslant x(t-\tau), x(t)\leqslant q$.因此对于 $x,v\in K$,$\|x\|=\|v\|=q$,

$$\begin{aligned}
\|(\Phi x)(t)\| &= \left\|\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda(u)du\right)f(s,x(s-\tau))\,ds + \sum_{\tau_k<t}\exp\left(-\int_{\tau_k}^{t}\lambda(u)du\right)I_k(x(\tau_k))\right\| \leqslant \\
&\left\|\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda(u)du\right)(\overline{D}+\eta_0)\lambda(s)x(s-\tau)\,ds + \sum_{\tau_k<t}a^*I_k(x(\tau_k))\right\| \leqslant (\overline{D}+\eta_0)\int_{-\infty}^{t}e^{\int_t^s\lambda(u)du}\lambda(s)\,ds\cdot \\
&\|x\| + a^*(\overline{I}+\eta_0)\|x\| = [(\overline{D}+a^*\overline{I}) + (a^*+1)\eta_0]\|x\| < \|x\|.
\end{aligned}\tag{20}$$

对于 $x\in K\cap\partial\Omega_1$,由上述证明可知 $\|\Phi x\|<\|x\|$.

另一方面,由条件(Ⅱ)知 $\underline{D}+a_*\underline{I}>1$,因此可以找到 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$0<\varepsilon_0<\frac{(\underline{D}+a_*\underline{I}-1)}{a_*+1}.$$

再由(18)式与(19)式知,存在一个常数 $l>0$,当 $\sigma l\leqslant x,v\leqslant l$ 时,

$$f(t,x(t-\tau))\geqslant(\underline{D}-\varepsilon_0)\lambda(t)x(t-\tau),\quad a_*\sum_{\tau_k<t}I_k(x)\geqslant a_*(\underline{I}-\varepsilon_0)x.$$

因此,如果 $x,v\in K$ 且 $\|x\|=\|v\|=l$,那么 $\sigma l\leqslant x(t),x(t-\tau)\leqslant l$.令 $t\in R$,$J\equiv 1$,$\Omega_2=\{x\in X;$

$\| x \| < l \}$，于是有

$$x \neq \mathrm{H}x + \lambda \mathrm{J} = \mathrm{H}x + \lambda, x \in K \cap K_2, \lambda > 0. \tag{21}$$

假设(21)式不成立，则存在 $x_0 \in K \cap K_2, \lambda_0 > 0$ 使得 $x_0 = \mathrm{H}x + \lambda_0$，令 $a_0 = \inf_{t \in R} x_0(t)$，对 $t \in R$ 有

$$x_0(t) = (\mathrm{H}x_0)(t) + \lambda_0 = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u) \cdot f(s, x_0(s - \mathrm{f}))\mathrm{d}s + \sum_{\mathrm{f}_k < t} \exp(-\int_{\mathrm{f}_k}^{t} \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u) \cdot I_k(x_0(\mathrm{f}_k)) + \lambda_0 \geqslant \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u} (\underline{D} - \mathrm{X}_0)\mathrm{T}(s) x_0(s - \mathrm{f})\mathrm{d}s + a_* \sum_{\mathrm{f}_k < t} I_k(x_0(\mathrm{f}_k)) + \lambda_0 \geqslant a_0(\underline{D} - \mathrm{X}_0) \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u} \mathrm{T}(s)\mathrm{d}s + a_* (\underline{I} - \mathrm{X}_0) a_0 + \lambda_0 = [(\underline{D} + a_* \underline{I}) - (a_* + 1)\mathrm{X}_0] a_0 + \lambda_0 > a_0 + \lambda_0. \tag{22}$$

这意味着 $a_0 > a_0 + \lambda_0$，与下确界定义矛盾．因此假设不成立，于是 $x \neq \mathrm{H}x + \lambda \mathrm{J}, x \in K \cap K_2, \lambda > 0$.

综上所述，算子 H 满足定理 A 中的所有条件，故算子 H 存在一个不动点 $\bar{x} \in K \cap (\overline{K_2} \backslash K_1)$．$\| \bar{x} \| < q, \bar{x} \geqslant \mathrm{e}l$，这个不动点就是系统(4)的概周期解．定理1证明完毕．

3 举例

考虑具有生物背景意义的具有脉冲时滞效应的动物血红细胞的 Lasota-Wazewska 模型：

$$\begin{cases} x'(t) = -\mathrm{T}(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-\mathrm{V}_i(t) x(t - \mathrm{f}_i)}, \\ \qquad t \neq t_k, t \neq t_k - \mathrm{f}_i, i = 1, 2, \cdots, m; \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k)), \\ \qquad t = t_k, t = t_k - \mathrm{f}_i, i = 1, 2, \cdots, m, k \in Z. \end{cases} \tag{23}$$

其中 $t_k < t_{k+1}, \lim_{k \to \pm\infty} t_k = +\infty$，$x(t)$ 表示在 t 时刻血红细胞的数量，$\mathrm{T}(t)$ 表示血红细胞的死亡率，$\mathrm{U}_i(t), \mathrm{V}_i(t)$ 表示单位时间内血红细胞的生长数量，f_i 表示产生一个血红细胞所需要的时间．$\mathrm{T}(t), \mathrm{U}_i(t), \mathrm{V}_i(t)$ 都是分段连续的定正概周期函数，$I_k \in C(R, R)$．满足于该系统的初值问题为

$$x(t) = \mathrm{O}(t), x(0) = \mathrm{O}(0) > 0.$$

再假设如下条件成立：对任意 $\mathrm{X} > 0$，存在 $\mathrm{f} > 0, q \in Z$ 使得

(1) $0 < \underline{\mathrm{T}} < \mathrm{T}(t) < \overline{\mathrm{T}}, 0 < \underline{\mathrm{U}} < \mathrm{U}_i(t) < \overline{\mathrm{U}}, 0 < \underline{\mathrm{V}} < \mathrm{V}_i(t) < \overline{\mathrm{V}}, \inf_{k \in Z} | t_{k+1} - t_k | = \theta > 0, t_{k-1} + \mathrm{f}_i < t_k$.

(2) $| I_k(x) - I_k(y) | \leqslant K_1 | x - y |, | I_k(x) | < R, | I_{k+q}(x) - I_k(x) | < \mathrm{X}, | t_{k+q} - t_k | < \mathrm{X}$.

定理 2 如果系统(23)满足条件：$0 < a_* \underline{I}, \bar{a}^* \bar{I} < 1$，则系统(23)存在一个正的概周期解．这里的记号 $a_*, \bar{a}^*, \underline{I}, \bar{I}$ 同上．

证明 对于系统(23)，$f(t, x(t - \mathrm{f})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-\mathrm{V}_i(t) x(t - \mathrm{f}_i)}$，易知 $f(t, x(t - \mathrm{f}))$ 满足定理1的条件．构造算子 h 为

$$\mathrm{h}(x(t)) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u) \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-r_i(t) x(t - \mathrm{f}_i)} \mathrm{d}s + \sum_{\mathrm{f}_k < t} e^{-\int_{\mathrm{f}_k}^{t} \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u} I_k(x(\mathrm{f}_k)).$$

类似上述方法可以证明 h 是全连续算子．

一方面，

$$\bar{D} = \lim_{v \to \infty} \sup_{t \in R} \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-r_i(t) v}}{\mathrm{T}(t) v} = \lim_{v \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{\mathrm{U}} e^{-\underline{\mathrm{V}}_i v}}{\underline{\mathrm{T}} v} \to 0.$$

而 $\bar{a}^* \bar{I} < 1$，则 $\bar{D} + \bar{a}^* \bar{I} < 1$，即满足定理1的条件($I$)．另一方面

$$\underline{D} = \lim_{v \to 0} \inf_{t \in R} \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-r_i(t) v}}{\mathrm{T}(t) v} = \lim_{v \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \underline{\mathrm{U}} e^{-\bar{r}_i v}}{\bar{\mathrm{T}} v} \to +\infty.$$

而 $0 < \underline{\mathrm{T}} < \mathrm{T}(t) < \bar{\mathrm{T}}, 0 < a_* \underline{I}$，那么 $\underline{D} + a_* \underline{I} > 1$，即满足定理1的条件(II)．所以由定理1知，系统(23)存在一个正的概周期解，它可以表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\int_s^t \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u) \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathrm{U}_i(t) e^{-r_i(t) x(t - \mathrm{f}_i)} \mathrm{d}s + \sum_{\mathrm{f}_k < t} e^{-\int_{\mathrm{f}_k}^{t} \mathrm{T}(u)\mathrm{d}u} I_k(x(\mathrm{f}_k)).$$

参考文献：

[1] Gopalsamy K, Trofimchuk S. Almost periodic solutions of Lasota-Wazewska delay differential equation [J]. Math Anal Appl, 1999, 237(1): 106-127.

[2] Stamov G T. On the existence of almost periodic solutions for the impulsive Lasota-Wazewska model[J]. Appl Math Letters, 2009, 22(4): 516-520.

[3] Yan J R. Existence and global attractivity of positive perodic solution for an impulsive Lasoka-Wazewska model[J]. J Math Anal Appl, 2003, 279(1): 111-120.

[4] 周刚，时宝，许广山，等．一类具有脉冲的 Nicholso 果蝇模型周期解的存在性和全局吸引性[J]．山东师范大学学报：自然科学版，2008, 23(1): 12-15.

(下转第 31 页 Continue on page 31)

学研究与评论, 1998, 18(4): 565-570.
[6] Aizicivici S, McKibben M, Reish S. Anti-periodic solutions to nonmonotone evolution equations with discontinuous nonlinearities [J]. Nonlinear Anal, 2001, 43: 233-251.
[7] Liu Bingwen. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations [J]. Nonlinear Analysis: Real Word Applications, 2009, 10: 2850-2856.
[8] Chen Y, Nieto J J, O'Regan D. Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46: 1183-1190.
[9] 陈太勇, 刘文斌, 张建军, 等. Lienard方程反周期解的存在性 [J]. 数学研究, 2007, 40(2): 187-195.
[10] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
[11] Mawhin J. An extension of the theorem of A C Lazer on forced nonlinear Oscillations [J]. J Math Anal Appl, 1972, 40: 20-29.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 26页 Continue from page 26)

[5] Bainov D D, Simeonov P. Systems with impulse effect, stability, theory and applications [M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
[6] Bainov D D, Simeonov P. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications [M]. New York: Logman Scientific and Technical, 1993.
[7] Stamov G T. Impulsive cellular neural networks and almost periodicity [J]. Proc Japan Acad, 2004, 80: 198-203.
[8] Lakshimikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of impulsive differential equation [M]. Singapore: World Scientific Series in Modern Applied Mathematics, 1989.
[9] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002.
[10] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Gomingen: Noordholf, 1964.

(责任编辑: 尹 闯)