DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.007
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 19~21

对角 Ramsey数 $R(20,20)$的新下界*

New Lower Bound for Diagonal Ramsey Number $R(20,20)$

许成章[1],梁文忠[1],黎贞崇[2],罗海鹏[2]
XU Cheng-zhang[1], LIANG Wen-zhong[1], LI Zhen-chong[2], LUO Hai-peng[2]

(1.梧州学院,广西梧州 543002; 2.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 利用 $4k+1$型素数构造 Paley图,探索对角 Ramsey数的下界,计算得到一个新的结果 $R(20,20) \geq 18557$.

关键词: 对角 Ramsey数 Paley图 团
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0019-03

Abstract Lower bounds for diagonal Ramsey numbers are explored by constructing Paley graphs of which the orders are primes of forms $4k+1$, and a new result $R(20,20) \geq 18557$ is obtained by computing.

Key words diagonal Ramsey numbers, Paley graph, clique

对于任意给定的正整数 $k \geq 3$,所谓对角 Ramsey数 $R(k,k)$是具有下述性质的最小正整数 n: 每个 n阶简单图,或者包含一个有 k个顶点的团,或者包含一个有 k个顶点的独立集.

确定对角 Ramsey数是组合数学中非常困难的问题[1]. Greenwood和 Gleason[2]于 1955年首创的构造性方法,利用 $4k+1$型素数的平方剩余构造循环图(这种环图也称为 Paley图),计算出 $R(3,3) > 5$与 $R(4,4) > 17$,再用存在性的方法证明了 $R(3,3) \leq 6$与 $R(4,4) \leq 18$,从而首先计算得到两个对角 Ramsey数的准确值 $R(3,3) = 6$与 $R(4,4) = 18$. 此后,1965年 Kalbfleisch[3]计算得到 $R(6,6) \geq 102$, 1972年 Burling与 Reyner[4]计算得到 $R(8,8) \geq 282$, Mathon[5]以及 Shearer[6]分别计算得到 $R(10,10) \geq 798$, $R(12,12) \geq 1278$, $R(13,13) \geq 1494$, $R(14,14) \geq 2742$, $R(15,15) \geq 2802$,并且证明了递推公式

$$R(k,k) \geq p+1 \Rightarrow R(k+1,k+1) \geq 2p+3. \quad (1)$$

动态综述文献[7]记录了近年来学术界研究对角 Ramsey数的最新进展: $R(7,7) \geq 205$, $R(9,9) \geq 565$, $R(10,10) \geq 798$, $R(11,11) \geq 1597$, $R(12,12) \geq 1637$, $R(13,13) \geq 2557$, $R(14,14) \geq 2989$, $R(15,15) \geq 5485$, $R(16,16) \geq 5605$, $R(17,17) \geq 8917$, $R(18,18) \geq 11005$, $R(19,19) \geq 17885$. 上述下界,除 $R(12,12)$之外都是由 Paley图或递推公式(1)给出的. 为了推动对角 Ramsey数的研究,美国学者 Radziszowski在他的个人主页(http://www.cs.rit.edu/~spr/topics.html)中提出如下问题: "计算 20000阶以内的 Paley图的团数." 注意到,随着 Paley图阶数的增加,计算其团数所遇到的运算量呈指数增长,迄今为止尚未见有文献报道这个问题的研究进展.

本文在文献[8]的基础上,改进计算对角 Ramsey数下界的方法,探索对角 Ramsey数 $R(20,20)$的新下界.

1 预备知识

定义 1 给定 $4k+1$型素数 $p \geq 5$,记 Z_p是模 p的一个完全剩余系, A_0是 p的平方剩余作成的集. 作

收稿日期: 2009-11-17
作者简介: 许成章(1976-),男,硕士研究生,讲师,主要从事组合数学和图论研究.
* 国家自然科学基金项目(60563008),广西自然科学基金项目(0991278, 0991074),梧州学院科研项目(2009B011, 2009B013),广西科学院基本科研业务费(080414)资助.

图 G_p,其顶点集 $V=Z_p$,边集 $E=\{(x,y)|x-y\in A_0\}$,称图 G_p 为 p 阶 Paley 图,其团数记为 $c(G_p)$.

由于 Z_p 是有限域, Paley 图 G_p 是自补图. 据 Ramsey理论易知

引理 1 设 $c=c(G_p)$,则有 $R(c+1,c+1)\geqslant p+1$.

定义 2 记 A_0 的一个子集 $B=\{x\in A_0|x-1\in A_0\}$.在图 G_p 中,记顶点集 V 的子集 B 作成的导出子图为 $G[B]$,其团数记为 $[B]$.

由于 Paley 图是顶点可迁的并且是边可迁的,注意到 $0\notin B,1\notin B$,则易知: C 是 $G[B]$ 的一个团 $\Leftrightarrow\{0,1\}\cup C$ 是 G_p 的一个团.故有

引理 2 $c(G_p)=[B]+2$.

引理 3[9] $|B|=\dfrac{p-5}{4}$.

定义 3 $x_1,x_2\in B$ 叫做线性关联的,记为 $x_1\sim x_2$,如果在 G_p 中存在自同构 f 把 3顶点集 $\{0,1,x_1\}$ 映成 $\{0,1,x_2\}$.

引理 4[8] B 上的线性关联关系是等价关系.每个等价类都是 6元集:

$\{a,a^{-1},1-a^{-1},a(a-1)^{-1},(1-a)^{-1},1-a\}$.

除非当 $2\in B$ 时有唯一的 3元等价类 $\{2,2^{-1},-1\}$,以及当 $e\in B$ 且 $e(1-e)=1$ 时有唯一的 2元等价类 $\{e,1-e\}$.

考虑 B 中等价元的一个共性.设 $a\sim a'$,则由定义 3可知在 G_p 中存在自同构 f 把 3顶点集 $\{0,1,a\}$ 映成 $\{0,1,a'\}$,从而 f 把 G_p 的一个团 $\{0,1,a,b\}$ 映成 G_p 的一个团 $\{0,1,a',f(b)\}$.这表明 B 中的等价元在图 G_p 中相应顶点的度数相同,即得

引理 5 对于 $a\in B$,记 $d(a)=|\{y\in B:y-a\in A_0\}|$,则 $a\sim a'\Rightarrow d(a)=d(a')$.

2 计算 Paley图团数的新算法

设 $p>17$,由引理 3知 $B\neq\varnothing$.由引理 4知在 B 的每个等价类中至少有一个正整数元.为了计算 $G[B]$ 的团数,先在 B 中引进一个全序 $\prec$.

定义 4 B 的每个等价类中的最小正整数元称为该等价类的代表元.代表元为 a 的等价类记为 $\langle a\rangle$. B 上的序 $\prec$ 规定如下:

(i) B 的同一等价类的元对序 $\prec$ 构成区间,其序为: 3元等价类是 $2\prec 2^{-1}\prec -1$, 2元等价类是 $e\prec 1-e$, 6元等价类是 $a\prec a^{-1}\prec 1-a^{-1}\prec a(1-a)^{-1}\prec(1-a)^{-1}\prec 1-a$.

(ii) 对于 B 中分属不同等价类的元 $a\in\langle a\rangle$ 和 $y\in\langle b\rangle$,规定 $x\prec y$ 当且仅当 $d(x)<d(y)$,或者 $d(x)=d(y)$ 但是 $a<b$.

易知 $\prec$ 是 B 上的全序, $x\prec y$ 称为 x 前于 y.

定义 5 全序集 $(B,\prec)$ 上的一条长为 k 的链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 称为起点是 x_0 的 A_0 链,如果对于 $0\leqslant i<j\leqslant k$ 有 $x_i-x_j\in A_0$.起点是 x_0 的 A_0 链的最大长记为 $l(x_0)$.

引理 6[8] 设 M 为 B 中所有代表元的集合,则 $[B]=1+\max\{l(a)|a\in M\}$.

根据上述理论,我们得到计算 Paley图 G_p 的团数的新算法如下.

算法 1

1° 给定 $4k+1$ 型素数 $p>17$ 及其平方剩余作成的集 A_0.

2° 据定义 1作 Paley图 G_p.据定义 2作集 B.令 $\mho=0$.

3° 据引理 4把集 B 分拆成若干个等价类,据定义 4作全序集 $(B,\prec)$.

4° 按照序 $\prec$,依次用回溯法计算以 $a\in M$ 为起点的 A_0 链的最大长 $l(a)$.如果 $l(a)>\mho$,令 $\mho=l(a)$.

5° 据引理 6有 $[B]=\mho+1$,据引理 1与引理 2得到一个对角 Ramsey 数的下界 $R(\mho+4,\mho+4)\geqslant P+1$.

据定义 4排序的方法实际上是“按顶点的度数小者优先” 的方法,这种方法符合人工智能中深度优先的原则.我们根据算法 1设计的程序,在用回溯法计算以 $a\in M$ 为起点的 A_0 链的最大长 $l(a)$ 的时候,可以多次应用“按顶点的度数小者优先” 的方法排序,对于充分大的 $4k+1$ 型素数 p,这样的计算方法具有较高的效率.

3 主要结果

定理 1 $R(20,20)\geqslant 18557$.

证明 据算法 1,给定素数 $p=9277$,可以得到

$A_0=\{1,3,4,7,9,10,11,12,16,19,21,23,25,26,27,28,30,31,33,34,36,37,40,\cdots\}$,

$B=\{4,10,11,12,26,27,28,31,34,37,48,49,58,64,65,70,76,77,78,82,83,84,\cdots\}$.

在全序集 $(B,\prec)$ 中有 2318个元, 387个等价类,其代表元的集为

$M=\{1329,330,70,1596,931,1577,999,309,998,1726,1727,2187,2387,\cdots\}$.

用回溯法计算得到以 $a=1329\in M$ 为起点的第一条最长链为

$1329\prec 330\prec -2559\prec 1248\prec 962\prec 634\prec$

$-81 \prec -4323 \prec 3040 \prec 1608 \prec -1722 \prec 3123 \prec 3964 \prec -993 \prec -3399 \prec -3203$.

此后没有更长的 A_0链,故有 $l(1329)=15$.用回溯法计算以 M 中其他各元为起点的 A_0链,其长度均不超过 15,即 $\forall a \in M \Rightarrow l(a) \leqslant 15$.根据引理 6引理 2和引理 1就得到

$[B]=16 \Rightarrow R(19,19) \geqslant 9277$.

再引用递推公式(1)即得 $R(20,20) \geqslant 18557$.这就证明了定理 1.

这个结果尚未见有文献报道.我们据算法 1设计程序,在 CPU为 AMD2400+ 的电脑上完成整个运算过程大约用了 122h.

参考文献:

[1] Graham R L, Rothschild B L, Spencer J H. Ramsey theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

[2] Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1-7.

[3] Kalbfleisch J G. Construction of special edge-chromatic graphs[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, 8: 575-584.

[4] Burling J P, Reyner S W. Some lower bounds of the Ramsey numbers [J]. Journal of Combinatorial Theory. Series B, 1972, 13: 168-169.

[5] Mathon R. Lower bounds for Ramsey numbers and Association schemes [J]. Journal of Combinatorial Theory. Series B, 1987, 42: 122-127.

[6] Shearer J B. Lower bounds for small diagonal Ramsey numbers[J]. Journal of Combinatorial Theory: series A, 1986, 42: 302-304.

[7] Radziszowski S P. Small Ramsey numbers[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2009, DS1, 12: 1-72.

[8] 苏文龙,罗海鹏,李乔.多色经典 Ramsey数 $R(q,q,\cdots,q)$ 的下界[J].中国科学(A辑), 1999, 29(5): 408-413.

[9] Godsil G, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Spring-verlag, 2001: 221-222.

(责任编辑: 韦廷宗)

(上接第 12页 Continue from page 12)

0,另一个是 5,即 $s_5=s_4=s_3=s_2=s_1=a$或 a^ib.因此过点 1的有向 5-圈只有两个,即 $(1,a,a^2,a^3,a^4,a^5)$ 和 $(1,a^ib,(a^ib)^2,(a^ib)^3,(a^ib)^4,(a^ib)^5)$.设 $e \in A_1^*$,则 e 固定 $1,a$ 和 a^ib.故 e固定这两个有向圈上的每一个点.特别地 e固定 $a^2,(a^ib)^2$,这样 e固定集合 $X_1(a)$, $X_1(a^ib)$ 中每一个点.由 X 的连通性,e固定 X上所有点,从而 $e=1$, $A_1^*=1$.由引理 1.2知 X正规.

参考文献:

[1] 徐明耀,黄建华,李慧陵,等.有限群导引(下册)[M].北京:科学出版社,1999.

[2] Wang C Q, Wang R J, Xu M Y. On the normality Cayley graphs of finite group[J]. Science in China(A), 1998, 28: 131-139.

[3] Li C H. On isomorphisms of connected Cayley graphs[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, 58: 137-145.

[4] Baik Young-Gheel, Feng Yanquan, Hyo-Seob Sim, et al. On the normality of Cayley graph of abelian groups[J]. Algebra Colloq, 1998, 5: 297-304.

[5] Xu M Y, Xu Sh J. Arc-transitive Cayley graphs of valency at most four on abelian group [J]. Southeast Asian Bulletin of Math, 2001, 25: 355-363.

[6] 冯衍全,王殿军,陈景林.一类非正规 Cayley有向图[J].数学学报, 2003, 46(1): 103-108.

[7] 聂淑凡,冯衍全. $4p$阶群上 2度 Cayley有向图的正规性[J].北京交通大学学报, 2006, 30(3): 81-92.

(责任编辑: 尹　闯)