DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2010.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2010, 17(1): 13~15

蕴含 F_6 可图序列的极值问题*

An Extremal Problem on Potentially F_6-graphic Sequences

陈 纲
CHEN Gang

(宁夏大学数学计算机学院,宁夏银川 750021)
(College of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan, Ningxia, 750021, China)

摘要: 考虑经典 Turán 型问题的变形,并确定 $\sigma(F_6,n)=4n+2$,其中 F_6 是 6 个顶点的扇图,n 充分大.

关键词: 图 扇图 度序列
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2010)01-0013-03

Abstract A variation of the classical Turán-type extremal problem is considered, and the value of $\sigma(F_6,n)=4n+2$ is determined, where F_6 is a fan graph on 6 vertices and n is large sufficiently.

Key words graph, fan graph, degree sequence

所有 n 项非增非负整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的集合记为 NS_n. 设 $\pi\in NS_n$,如果 π 的每一项都是非零的,则称 π 为正的. 如果 π 是某一个 n 阶简单图 G 的度序列,则称 $\pi\in NS_n$ 是可图的;并且 G 称为 π 的一个实现. NS_n 中所有正的可图序列构成的集合记为 GS_n. 对于 $\pi\in NS_n$,定义 $\sigma(\pi)=d_1+d_2+\cdots+d_n$. 对于给定的图 H,称 $\pi\in GS_n$ 是蕴含 H 可图的,如果 π 有一个实现包含 H 作为子图. 若图 G 和图 H 没有公共顶点,则用 $G\cup H$ 表示 G 和 H 的并,当 G 同构于 H 时,简记 $G\cup H$ 为 $2G$. 图 $G+H$ 表示具有顶点集 $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$ 和边集 $E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup\{xy: x\in V(G), y\in V(H)\}$ 的图.

文献[1]考虑经典 Turán 型问题的变形: 确定最小的正偶数 $\sigma(H,n)$,使得对于每一个 n 项可图序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,当 $\sigma(\pi)\geqslant\sigma(H,n)$ 时,π 是蕴含 H 可图的. 对于 $H=K_{r+1}$,其中 K_{r+1} 为 $r+1$ 阶完全图. 文献[2]猜想对于充分大的 n,$\sigma(K_{r+1},n)=(r-1)(2n-r)+2$,同时证明此猜想对于 $r=2$ 成立. 李炯生等[3~5]证明文献[2]中的猜想对于 $r\geqslant 3$ 和充分大的 n 是成立的.

具有 m 个顶点的扇图,记为 F_m,是一条 $m-1$ 个顶点的路 P_{m-1} 加上另一个顶点,并且此顶点与路 P_{m-1} 的每个顶点都相邻. 文献[2]和文献[6]分别确定了 $\sigma(F_3,n)$ 和 $\sigma(F_4,n)$ 的值,其中 $F_3=K_3$,$F_4=K_4-e$ 是从 K_4 中删去一条边后所得的图. 文献[7]确定了 $\sigma(F_5,n)$ 的值. 本文考虑经典 Turán 型问题的变形,并确定 $\sigma(F_6,n)=4n+2$,其中 F_6 是 6 个顶点的扇图,n 充分大.

1 预备知识

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$. 记 $\pi'=(d_2-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$,并且称 $\pi''=(d_1',d_2',\cdots,d_{n-1}')$ 是 π 删去 d_1 后的剩余序列,其中 $d_1'\geqslant d_2'\geqslant\cdots\geqslant d_{n-1}'$ 是 $d_2-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n$ 的重排. 易知,如果 π'' 是可图的,则 π 也是可图的,这是因为在 π'' 的实现 G' 中添加一个度为 d_1 的新顶点 v_1,使得 v_1 相邻于 G' 中那些从 π 到 π'' 的过程中度被减 1 的顶点,所得的图 G 是 π 的一个实现.

定理 1.1[8] 设 $\pi\in NS_n$. 则 $\pi\in GS_n$ 当且仅当 $\pi''\in GS_{n-1}$.

定理 1.2[9] 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$,且 $\sigma(\pi)$ 为偶数. 则 $\pi\in GS_n$ 当且仅当对每个 t, $1\leqslant t\leqslant n-1$,有

$$\sum_{i=1}^{t} d_i\leqslant t(t-1)+\sum_{j=t+1}^{n}\min\{t,d_j\}.$$

定理 1.3[1] 设 $\pi\in GS_n$,H 是一个给定的图. 若

收稿日期: 2009-02-03
作者简介: 陈 纲(1977-),男,硕士研究生,主要从事图论研究。
* 宁夏高校科学研究项目,宁夏大学科研基金(项目编号: ZR200827)资助。

π有一个实现 G满足 $H\subseteq G$,则 π有一个实现 G'满足 $H\subseteq G'$且 H中的顶点在 G'中的度是 π中最大的.

定理 1.4[10] 设 $n\geqslant 4$, $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$,且 $\pi\neq(2^5),(2^6)$,其中 x^y 表示 y个连续的项 x. 则 π是蕴含四圈 C_4可图的,当且仅当 $d_4\geqslant 2$,且当 $d_1=n-1$时, $d_2\geqslant 3$.

定理 1.5[11] 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$.如果 $d_r\geqslant r$, $d_{2r+2}\geqslant r-1$,则 π是蕴含 K_{r+1}可图的.

定理 1.6[12] 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是非负整数序列, $m=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$, $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 是偶数且 $\bar{\pi}=(\bar{d}_1,\bar{d}_2,\cdots,\bar{d}_n)$ 是 π的重排,其中 $\bar{d}_1\geqslant\bar{d}_2\geqslant\cdots\geqslant\bar{d}_n$是 $d_1,d_2,\cdots,d_n$的重排.如果存在一个整数 $n_1\leqslant n$,使得 $\bar{d}_{n_1}\geqslant h\geqslant 1$且 $n_1\geqslant\frac{1}{h}[\frac{(m+h+1)^2}{4}]$,那么 π是可图的.

2 主要结果

引理 2.1 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$满足 $d_5\geqslant 3$, $\sigma(\pi)\geqslant 4n+2$且 $n\geqslant 7$.则从 π中删去 d_1 的剩余序列 $\pi''=(d_1',d_2',\cdots,d_{n-1}')$是蕴含 P_5 可图的.

证明 设序列 $\pi''=(d_1',d_2',\cdots,d_{n-1}')$中的非零项的项数为 t.仍然记 $\pi''=(d_1',d_2',\cdots,d_t')$.那么只需要证明正的可图序列 π''是蕴含 P_5 可图的.

如果 $\pi''=(2^5)$或 $\pi''=(2^6)$,则 π'是蕴含 P_5可图的.假设 $\pi''\neq(2^5),(2^6)$.如果 $d_1'=t-1$且 $d_2'=2$,则 $\pi''=(t-1,2^k,1^{t-k-1})$,其中 $k\geqslant 4$. 显然 $K_1+(\frac{k}{2}K_2\cup(t-k-1)K_1)$是 π''的实现,且包含 P_5作为一个子图.因此, π''是蕴含 P_5可图的.假设 $d_1'\leqslant t-2$或者 $d_2'\geqslant 3$.由定理 1.4, π''是蕴含 C_4可图的.设 G'是 π''的一个实现,且 $v_1v_2v_3v_4v_1\subseteq G'$.如果存在两个顶点 $v_i\in V(C_4)$, $v_j\notin V(C_4)$满足 $v_iv_j\in E(G')$,则 G'包含一条 P_5作为子图,即 $v_jv_iv_{i+1}\cdots v_4v_1\cdots v_{i-1}\subseteq G'$.因此, π''是蕴含 P_5可图的.于是,假设任意的顶点 $u\notin V(C_4)$都不与 v_i相邻, $1\leqslant i\leqslant 4$.由于 $\sigma(\pi'')\geqslant\sigma(\pi)-2d_1\geqslant 4n+2-2(n-1)>12$,故存在一条边 $e=xy\in E(G')$,且 $x,y\notin V(C_4)$.在 G'中,删去边 xy和 v_1v_2,添加两条新的边 xv_1,yv_2,记 $G''=G'+\{xv_1,yv_2\}-\{xy,v_1v_2\}$.显然, G''是 π''的一实现,且包含 P_5作为子图,即 $yv_2v_3v_4v_1\subseteq G''$.因此, π''是蕴含 P_5 可图的.证明完毕.

引理 2.2 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$满足 $n-2\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_6=\cdots=d_{d_1+1}=d_{d_1+2}\geqslant\cdots\geqslant d_n$,其中 $d_1\geqslant 5$且 $n\geqslant 15$.如果 $4\geqslant d_2,d_6\geqslant 3$,则 π是蕴含 F_6可图的.

证明 考虑从 π中删去 d_1后的序列

$$\pi'=(d_2-1,\cdots,d_6-1,d_7-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n).$$

由定理 1.1,只需证明 π'存在一个实现 G_1,使得 $d_{G_1}(v_i)=d_i-1$, $i=2,3,\cdots,6$,且 $P_5\subseteq G_1[\{v_2,v_3,\cdots,v_6\}]$.

令 $\pi_1=(d_2-1,\cdots,d_6-1,d_7^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$,其中 $d_7^{(1)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(1)}$是项 $d_7-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n$ 的重排.记 $\pi_1=(s_2,s_3,\cdots,s_6,d_7^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$,其中 $s_i=d_i-1-2$, $2\leqslant i\leqslant 6$.显然, $1\geqslant s_2\geqslant s_3\geqslant\cdots\geqslant s_6\geqslant 0$.由 π_{k-1}, $2\leqslant k\leqslant 6$,按如下方法构造序列 π_k:从 π_{k-1}中移去 s_k,并从 $d_7^{(k-1)}$ 项开始,将非零的前 s_k 项各减 1,然后按非增顺序重排最后的 $n-6$项.由于 $n-6\geqslant 5$,且从 π_{k-1}构造 π_k的过程看, π_k的项中不会出现负项和零项.易知, $\pi_6=(d_7^{(6)},d_8^{(6)},\cdots,d_n^{(6)})$满足 $4\geqslant d_7^{(6)}\geqslant d_8^{(6)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(6)}\geqslant 1$且 $\sigma(\pi_6)$是偶数. $n-6\geqslant[\frac{(4+1+1)^2}{4}]$,由定理 1.6, π_6是可图的.设 G_6是 π_6的一个实现.对于 $j=5,4,3,2,1$,依次向 π_{j+1}的实现 G_{j+1}中添加新的顶点 v_{j+1},使其与从 π_j到 π_{j+1}的过程中度减少 1的顶点邻接.易知, G_1是序列 $\pi_1=(s_2,s_3,\cdots,s_6,d_7^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$的一个实现,满足 $d_{G_1}(v_i)=s_i$, $2\leqslant i\leqslant 6$且 $\{v_2,v_3,\cdots,v_6\}$是 G_1中的独立集.于是, π_1的实现 G_1'可以由 G_1中 $\{v_2,v_3,\cdots,v_6\}$添加新的边使其形成 C_5 得到,即 $G_1'=G_1\cup\{v_2v_3,v_3v_4,v_4v_5,v_5v_6,v_6v_2\}$.易知, G_1'是 π'的实现, $d_{G_1'}(v_i)=d_i-1$, $2\leqslant i\leqslant 6$且 $P_5\subseteq G_1'[\{v_2,\cdots,v_6\}]$.证明完毕.

引理 2.3 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$满足 $n-2\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_6=\cdots=d_{d_1+1}=d_{d_1+2}\geqslant\cdots\geqslant d_n$,其中 $d_2\geqslant 5$, $4\geqslant d_6\geqslant 2$且 $n\geqslant 15$.如果 $d_3\geqslant 4$, $d_5\geqslant 3$或者 $d_3=d_6=3$,则 π是蕴含 F_6可图的.

证明 考虑从 π中删去 d_1后的序列

$$\pi'=(d_2-1,\cdots,d_6-1,d_7-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n).$$

记 $\pi_1'=(d_2^{(1)},\cdots,d_6^{(1)},d_7^{(1)},d_8^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$,其中 $d_i^{(1)}=d_i-1$, $i=2,3,\cdots,6$,且 $d_7^{(1)}\geqslant d_8^{(1)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(1)}$是 π'中最后的 $n-6$项的重排.由 $\pi_{k-1}'=(d_k^{(k-1)},\cdots,d_6^{(k-1)},d_7^{(k-1)},d_8^{(k-1)},\cdots,d_n^{(k-1)})$, $2\leqslant k\leqslant 6$,按如下方法构造序列 π_k':从 π_{k-1}'中移去 $d_k^{(k-1)}$,并从 $d_{k+1}^{(k-1)}$ 项开始,将非零的前 $d_k^{(k-1)}$ 项各减 1,然后按非增顺序重排最后的 $n-6$项.由于 $n-6\geqslant 5$,从 π_{k-1}'构造 π_k'的过程看, π_k'的项中不会出现负项.易知, $1\geqslant d_7^{(k)}-d_{d_1+2}^{(k)}\geqslant 0$.由 π_6'的定义知, $\pi_6'=(d_7^{(6)},d_8^{(6)},\cdots,d_n^{(6)})$,满足 $4\geqslant d_7^{(6)}\geqslant d_8^{(6)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(6)}\geqslant 0$且 $\sigma(\pi_6')$是偶数.如果

$d_7^{(6)} \geqslant 2$,则 $d_n^{(6)} \geqslant 1$. 由 $n \geqslant 15$, 于是 $n-6 \geqslant [\frac{(4+1+1)^2}{4}]$. 由定理 1.6, c_6' 是可图的. 如果 $d_7^{(6)} = 1$,则 c_6' 显然是可图的. 设 G_6 是 c_6' 的一个实现. 对于 $j = 5,4,3,2,1,0$,依次向 c_{j+1}' 的实现 G_{j+1} 中添加新的顶点 v_{j+1},使其与从 c_j' 到 c_{j+1}' 的过程中度减少 1 的顶点邻接. 易见, G_0 是 c 的一实现. 在构造 G_0 的过程中,由 $d_3 \geqslant 4, d_5 \geqslant 3(d_3 = d_6 = 3)$,有 $d_3^{(2)} \geqslant 2, d_5^{(2)} \geqslant 1(d_3^{(2)} = d_6^{(2)} = 1)$,因此有 $v_3v_4, v_3v_5 \in E(G_2)$ 或者 $v_3v_4, v_5v_6 \in E(G_2)$. 又由于 $d_2 \geqslant 5$,故 $F_6 \subseteq K_2 + (P_3 \cup K_1) \subseteq G_0$ 或者 $F_6 \subseteq K_2 + 2K_2 \subseteq G_0$. 因此, c 是蕴含 F_6 可图的. 证明完毕.

定理 2.1 $e(F_6, n) = 4n+2$,其中 n 充分大.

证明　考虑序列 $c = (4^n)$ 是 4正则图的度序列,并且 c 的任意实现不包含子图 F_6. 因为 F_6 有一个顶点的度是 5,所以, $e(F_6, n) \geqslant e(c) + 2 = 4n+2$.

为了证明 $e(F_6, n) \leqslant 4n+2$,只需要证明: 如果 $c = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$ 满足 $e(c) \geqslant 4n+2$,且 n 充分大,则 c 是蕴含 F_6 可图的. 设 $c = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$ 满足 $e(c) \geqslant 4n+2$. 显然有 $d_1 \geqslant 5$.

如果 $d_5 \leqslant 2$,由定理 1.2,有 $\sum_{i=1}^{4} d_i \leqslant 20 + \sum_{j=5}^{n} \min\{4, d_j\} = 12 + 2(n-4)$, 于是 $e(c) = \sum_{i=1}^{4} d_i + \sum_{j=5}^{n} d_j \leqslant 12 + 4(n-4) = 4n - 4 < 4n + 2$,矛盾. 即 $d_5 \geqslant 3$.

如果 $d_6 \leqslant 1$,由定理 1.2,有 $\sum_{i=1}^{5} d_i \leqslant 20 + \sum_{j=6}^{n} \min\{5, d_j\} = 20 + (n-5)$, 于是 $e(c) = \sum_{i=1}^{5} d_i + \sum_{j=6}^{n} d_j \leqslant 20 + 2n - 10 < 4n + 2$,矛盾. 即 $d_6 \geqslant 2$.

考虑从 c 中删去 d_1 后的剩余序列 $c'' = (d_1', d_2', \cdots, d_{n-1}')$. 由定理 1.1和引理 2.1, c'' 是蕴含 P_5 可图的. 如果 $d_1 = n-1$或者存在一整数 t, $6 \leqslant t \leqslant d_1 + 1$,使得 $d_t > d_{t+1}$,则 $d_1' = d_2 - 1, d_2' = d_3 - 1, \cdots, d_5' = d_6 - 1$. 由定理 1.1和定理 1.3, c 是蕴含 F_6 可图的. 因此,假设 $n - 2 \geqslant d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_5 \geqslant d_6 = \cdots = d_{d_1+2} \geqslant \cdots \geqslant d_n$.

如果 $4 \geqslant d_2$,则 $d_6 \geqslant 3$;否则,假设 $d_6 \leqslant 2$. 于是 $e(c) \leqslant n - 1 + 16 + 2(n-5) = 3n + 5 < 4n + 2$, 矛盾. 由引理 2.2, c 是蕴含 F_6 可图的.

假设 $d_2 \geqslant 5$. 如果 $d_{12} \leqslant 3$,则 $d_1 \geqslant 10$;否则,如果 $d_1 \leqslant 9$,则 $e(c) \leqslant 9 \times 11 + 3(n-11) < 4n + 2$, 与 n 充分大矛盾. 因此, $3 \geqslant d_6 = \cdots = d_{12} = \cdots = d_{d_1+2} \geqslant 2$. 如果 $d_3 = 3$,由 $d_5 \geqslant 3$,则 $d_6 = 3$. 因此,由引理 2.3, c 是蕴含 F_6 可图的. 如果 $d_3 \geqslant 4$,由 $d_5 \geqslant 3$ 且 $3 \geqslant d_6 \geqslant 2$,则 c 是蕴含 F_6 可图的. 假设 $d_{12} \geqslant 4$. 如果 $d_6 \geqslant 5$,由定理 1.5,则 c 是蕴含 K_6 可图的,即 c 也是蕴含 F_6 可图的. 如果 $d_6 = 4$,由引理 2.3,则 c 是蕴含 F_6 可图的. 证明完毕.

参考文献:

[1] Gould R J, Jacobson M S, Lehel J. Potentially G-graphic degree sequences[M]//Alavi Y, Lick Z, Schwenk A J, et al. Combinatorics, graph theory and algorithms. Kalamazoo Michigan: New Issues Press, 1999: 387-400.

[2] Erdös P, Jacobson M S, Lehel J. Graphs realizing the same degree sequences and their respective clique numbers[M]//Alavi Y, Chartrand G, Oellermann O R, et al. Graph theory, combinatorics and applications. New York: John Wiley Sons, 1991: 439-449.

[3] Li J S, Song Z X. An extremal problem on the potentially P_k-graphic sequence[J]. Discrete Math, 2000, 212: 223-231.

[4] Li J S, Song Z X. The smallest degree sum that yields potentially P_k-graphic sequences[J]. J Graph Theory, 1998, 29: 63-72.

[5] Li J S, Song Z X, Luo R. The Erdös-Jacobson-Lehel conjecture on potentially P_k-graphic sequences is true[J]. Science in China, Ser A, 1998, 41: 510-520.

[6] Lai C H. A note on potentially K_4-e graphic sequences[J]. Australasian J Combin, 2001, 24: 123-127.

[7] Chen G. The smallest degree sum that yields potentially fan graphical sequences[J]. J Northwest Normal Univ, 2006, 42: 27-30.

[8] Kleitman D J, Wang D L. Algorithm for constructing graphs and digraphs with given valences and factors[J]. Discrete Math, 1973, 6: 79-88.

[9] Erdös P, Gallai T. Graphs with given degrees of vertices[J]. Math Lapok, 1960, 11: 264-274.

[10] Luo R. On potentially C_k-graphic sequences[J]. Ars Combinatoria, 2002, 64: 301-318.

[11] Yin J H, Li J S. Two sufficient conditions for a graphic sequence to have a realization with prescribed clique size[J]. Discrete Math, 2005, 301: 218-227.

[12] Yin J H, Li J S. An extremal problem on potentially $K_{r,s}$-graphic sequences[J]. Discrete Math, 2003, 260: 295-305.

(责任编辑: 尹　闯)