

超混沌 Lü 系统的自适应广义投影同步*

Adaptive Generalized Projective Synchronization of Hyperchaotic Lü Systems

汪 贺, 贾 贞, 李 勇, 王 俊

WANG He, JIA Zhen, LI Yong, WANG Jun

(桂林理工大学数理系, 广西桂林 541004)

(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 基于自适应控制方法和 Lyapunov 稳定性理论, 分别在参数完全未知和部分未知的情况下, 设计适合超混沌 Lü 系统广义投影同步的非线性自适应控制器, 并进行数值仿真. 结果表明, 该方法使 2 个恒同超混沌 Lü 系统在全局范围内实现广义投影同步. 在部分参数未知的情况下, 实现了参数的跟踪.

关键词: 超混沌系统 投影同步 跟踪 未知参数

中图分类号: O415 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0414-04

Abstract Based on adaptive control method and Lyapunov stability theory respectively in the cases of fully and partly unknown parameters, nonlinear adaptive control laws are designed so that the hyperchaotic Lü systems are generalized projective synchronization. Finally, numerical simulations are given to demonstrate the two identical hyperchaotic Lü systems are globally asymptotically generalized projective synchronization. Furthermore, the tracking of parameters in the later case is realized.

Key words hyperchaotic system, projective synchronization, tracking, unknown parameter

自 1963 年 E. N. Lorenz^[1]发现第一个混沌吸引子以来, 人们对混沌现象进行了广泛而深入的研究. Pecora 和 Carroll^[2]在 1990 年首次提出混沌同步的思想, 并给出一种混沌同步的有效方法 (PC 方法), 从此揭开了混沌同步研究的序幕. 继陈关荣^[3]在 1998 年发现 Chen 吸引子后, 吕金虎等^[4]人在 2002 年通过混沌反控制的思想又发现一个新的吸引子, 并称之为 Lü 吸引子. 2006 年 Aimin chen 等人在研究 Lü 系统的控制过程中, 用状态反馈的方法, 在 Lü 系统中增加一个新变量, 获得了一个新的超混沌系统, 称为超混沌 Lü 系统^[5]. 混沌系统对模拟现实世界起着非常大作用, 但是混沌运动在很多情况下是不利的, 需要加以抑制. 混沌控制的方法很多, 有自适应方法, 线性耦合方法, 变结构控制法, 反步设计法等等^[6-8]. 随着混沌同步研究的不断深入, 人们提出不同类型的混沌

同步, 如完全同步或称精确同步 (CS), 相同步 (PS), 广义同步 (GS), 延迟同步 (LS), 互同步 (MS), 一致同步 (US) 等等^[9]. 1999 年, Maimeri 和 Rehacek 在部分线性系统中观察到投影同步现象^[10], 从此, 投影同步很快成为混沌同步研究的一个热点课题. 混沌系统的投影同步是指两个混沌系统的对应变量按照一定的比例关系线性地演化^[11,12], 它是一类特殊的广义同步现象.

本文研究超混沌 Lü 系统的广义投影同步问题, 分别在参数完全未知和部分未知的情况下设计了非线性自适应控制器, 使两个恒同超混沌 Lü 系统在全局范围内实现广义投影同步, 并且在参数部分未知情况下, 实现了参数的跟踪. 用 Lyapunov 方法从理论上证明结论, 并通过数值仿真验证理论的有效性.

1 基本概念

定义 1 设有两个恒同的混沌系统的动力学方程为 $\dot{x} = F(x), \dot{y} = F(y)$, 其中 $x, y \in R^n$ 分别为两个系统的状态向量, $F: R^n \rightarrow R^n$ 为连续可微函数. 若存在非零常数 T , 使得: $\lim_{T \rightarrow \infty} \|Tx - y\| = 0$, 则称这两个

收稿日期: 2009-05-13

作者简介: 汪 贺 (1985-), 女, 硕士研究生, 主要从事混沌系统的同步与控制研究.

* 广西自然科学基金项目 (桂科基 0991244), 广西教育科研基金项目 (200807MS043) 资助.

系统是投影同步的,称 Γ 为比例因子.

描述超混沌 Lü 系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = -x_1x_3 + dx_4, \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c 为 Lü 系统的参数, d 为控制参数. 随着参数 d 的逐渐增大, 系统由周期轨道变为混沌状态, 然后再变为超混沌状态. 当系统的参数取 $a = 36, b = 3, c = 20, -0.35 < d \leq 1.3$ 时, 系统是超混沌的. 参数 d 的变化对系统 (1) 的状态起着十分重要的作用. $d = 1$ 时的超混沌吸引子如图 1 所示

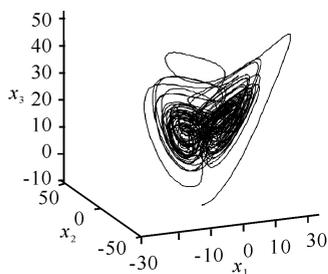


图 1 超混沌吸引子

Fig. 1 Hyperchaotic Lü attractor

2 2个超混沌 Lü 系统自适应广义投影同步

2.1 系统参数完全未知的情形

将系统 (1) 作为驱动系统, 受控的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + cy_2 + u_2(t), \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3(t), \\ \dot{y}_4 = y_1y_3 + dy_4 + u_4(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 为待设计的非线性控制器, a, b, c, d 为未知参数.

系统 (1) 和 (2) 的误差向量为 $e = y - \Gamma x (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中 $\Gamma \in R$ 为比例因子. 于是系统 (1) 和 (2) 的误差系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_4 + a(e_2 - e_1) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 = ce_2 + \Gamma x_1x_3 - y_1y_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 = -be_3 + y_1y_2 - \Gamma x_1x_2 + u_3(t), \\ \dot{e}_4 = de_4 + y_1y_3 - \Gamma x_1x_3 + u_4(t). \end{cases} \quad (3)$$

取 p_a, p_c, p_d 为 a, c, d 的估计值, h 为正的常数, 有

定理 1

对任意正的参数 a, b, c, d , 如果控制器设计为

$$\begin{cases} u_1(t) = -p_a e_2; \\ u_2(t) = -(p_c + h)e_2 - \Gamma x_3(x_1 - y_1); \\ u_3(t) = -y_1e_4 + \Gamma x_2(x_1 - y_1); \\ u_4(t) = -(p_d + h)e_4 - e_1 + \Gamma x_3(x_1 - y_1), \end{cases} \quad (4)$$

并且 p_a, p_c, p_d 满足

$$p_a = e_1e_2; p_c = e_2^2; p_d = e_4^2. \quad (5)$$

则对任意的比例因子 $\Gamma \in R$ 和任意的初始条件, 系统 (1) 和 (2) 将实现广义投影同步.

证明 由已知条件, 系统 (3) 将变为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + (a - p_a)e_2 + e_4, \\ \dot{e}_2 = (c - p_c - h)e_2 - y_1e_3, \\ \dot{e}_3 = y_1e_2 - be_3 - y_1e_4, \\ \dot{e}_4 = -e_1 + y_1e_3 + (d - p_d - h + 1)e_4. \end{cases} \quad (6)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + (p_a - a)^2 + (p_c - c)^2 + (p_d - d)^2).$$

$V(t)$ 时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 + (p_a - a)\dot{p}_a + \\ & (p_c - c)\dot{p}_c + (p_d - d)\dot{p}_d = e_1(-ae_1 + (a - p_a)e_2 + \\ & e_4) + e_2((c - p_c - h)e_2 - y_1e_3) + e_3(y_1e_2 - be_3 - \\ & y_1e_4) + e_4(-e_1 + y_1e_3 + (d - p_d - h + 1)e_4) + \\ & (p_a - a)e_1e_2 + (p_c - c)e_2^2 + (p_d - d)e_4^2 = -ae_1^2 - \\ & he_2^2 - be_3^2 - he_4^2 = -e^T H e < 0, \end{aligned}$$

因此, V 是半正定的. 式中 $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$, $H = \text{diag}\{a, h, b, h\}$. 显然, $e_1, e_2, e_3, e_4, p_a - a, p_c - c, p_d - d \in L^\infty$, 由误差系统 (6) 知 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L^\infty$. 由于 $\dot{V} = -e^T H e$,

$$\int_0^t \lambda_{\min}(H) \|e\|^2 dt \leq \int_0^t e^T H e dt = \int_0^t (-\dot{V}) dt =$$

$$V(0) - V(t) \leq V(0).$$

其中 $\lambda_{\min}(H)$ 是对称正定矩阵 H 的最小特征值, 从而有 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L_2$. 因此根据 Barbalat 引理^[13]有: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_i(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, 3, 4$. 这就是说, 系统 (1) 和 (2) 实现了广义投影同步, 定理 1 的结论成立.

2.2 系统参数部分未知的情形

将系统 (1) 作为驱动系统, 受控的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1(t), \\ \dot{y}_2 = c_q y_2 - y_1y_3 + u_2(t), \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - b_q y_3 + u_3(t), \\ \dot{y}_4 = y_1y_3 + d_q y_4 + u_4(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 为控制器, a, b, c, d 是已知参数, 但是 a_q, b_q, c_q, d_q 是未知参数.

系统 (1) 和 (7) 的同步误差为 $e_i = y_i - \Gamma x_i, i = 1, 2, 3, 4$, 其中 $\Gamma \in R$ 为比例因子. 于是系统 (1) 和 (7) 的误差系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_4 + a(y_2 - y_1) - \Gamma a(x_2 - x_1) + u_1(t), \\ \dot{e}_2 = c_q y_2 - \Gamma c x_2 + \Gamma x_1x_3 - y_1y_3 + u_2(t), \\ \dot{e}_3 = \Gamma b x_3 - b_q y_3 + y_1y_2 - \Gamma x_1x_2 + u_3(t), \\ \dot{e}_4 = d_q y_4 - \Gamma d x_4 + y_1y_3 - \Gamma x_1x_3 + u_4(t). \end{cases}$$

(8)

取 p_a, p_b, p_c, p_d 为 a_i, b_i, c_i, d_i 的估计值, h 为正的常数, 有

定理 2 对任意正的参数 a, b, c, d , 如果控制器设计为

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -a(y_1 - \mathbb{T}x_2) - p_a(y_2 - y_1); \\ u_2(t) &= -(p_c + h)y_2 + \mathbb{T}(c + h)x_2 - \mathbb{T}x_3(x_1 - y_1); \\ u_3(t) &= -(b - p_b)y_3 + \mathbb{T}x_2(x_1 - y_1) - y_1e_4; \\ u_4(t) &= -(p_d + h)y_4 + \mathbb{T}(d + h)x_4 + \mathbb{T}x_3(x_1 - y_1) - e_1; \end{aligned} \quad (9)$$

并且 p_a, p_b, p_c, p_d 满足

$$p_a = (y_2 - y_1)e_1; p_b = -y_3e_3; p_c = y_2e_2; p_d = y_4e_4. \quad (10)$$

则对任意的比例因子 $\mathbb{T} \in \mathbb{R}$ 和任意的初始条件, 系统 (1) 和 (7) 是实现广义投影同步. 并且未知参数能够被识别, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_a(t) = a_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_b(t) = b_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_c(t) = c_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_d(t) = d_i$.

证明 由已知条件, 系统 (8) 将变为

$$\begin{cases} e_1 = -ae_1 + e_4 + (a_i - p_a)(y_2 - y_1), \\ e_2 = -he_2 - y_1e_3 + (c_i - p_c)y_2, \\ e_3 = y_1e_2 - be_3 - y_1e_4 - (b_i - p_b)y_3, \\ e_4 = -e_1 + y_1e_3 - he_4 + (d_i - p_d)y_4. \end{cases} \quad (11)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + (p_a - a_i)^2 + (p_b - b_i)^2 + (p_c - c_i)^2 + (p_d - d_i)^2).$$

$V(t)$ 时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1e_1 + e_2e_2 + e_3e_3 + e_4e_4 + (p_a - a_i)p_a + (p_b - b_i)p_b + (p_c - c_i)p_c + (p_d - d_i)p_d = \\ &= e_1(-ae_1 + e_4 + (a_i - p_a)(y_2 - y_1)) + e_2(-he_2 - y_1e_3 + (c_i - p_c)y_2) + \\ &= e_3(y_1e_2 - be_3 - y_1e_4 - (b_i - p_b)y_3) + e_4(-e_1 + y_1e_3 - he_4 + (d_i - p_d)y_4) + \\ &= (p_a - a_i)(y_2 - y_1)e_1 - (p_b - b_i)y_3e_3 + (p_c - c_i)y_2e_2 + (p_d - d_i)y_4e_4 = -ae_1^2 - he_2^2 - be_3^2 - \\ &= -e^T H e \leq 0. \end{aligned}$$

证明过程类似定理 1, 根据 Barbalat 原理有, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_i(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, 3, 4$. 这就是说, 系统 (1) 和 (7) 实现广义投影同步.

我们取 $W = \{(e_1, e_2, e_3, e_4, p_a, p_b, p_c, p_d) | V = 0\}$, 由于 $(e_1, e_2, e_3, e_4, p_a, p_b, p_c, p_d) \in W$, 有 $e_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, 从而有 $e = 0, i = 1, 2, 3, 4$. 由系统 (10) 和 (11) 可得到 $p_a = 0, p_b = 0, p_c = 0, p_d = 0$ 和 $(a_i - p_a)(y_2 - y_1) = 0, (b_i - p_b)y_3 = 0, (c_i - p_c)y_2 = 0,$

$(d_i - p_d)y_4 = 0$. 因为 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 都是混沌的状态变量, 故必有 $a_i = p_a, b_i = p_b, c_i = p_c, d_i = p_d$. $D = \{e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0, e_4 = 0, a_i = p_a, b_i = p_b, c_i = p_c, d_i = p_d\}$ 是 W 的最大不变集, 根据 Lasalle 不变集原理有 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_a(t) = a_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_b(t) = b_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_c(t) = c_i; \lim_{t \rightarrow \infty} p_d(t) = d_i$. 故定理 2 的结论成立.

3 数值仿真

数值仿真中驱动系统和响应系统初始状态分别取为 $x(0) = (1, 5, -5, 10); y(0) = (2, -5, 8, -3)$. 系统参数分别取为 $a = 36, b = 3, c = 20, d = 1$.

图 2 展示当参数完全未知时系统 (1) 与 (2) 实现广义同步. 这里参数估计值的初始条件取为 $p_a(0) = 5, p_b(0) = 3, p_d(0) = 2$, 并取 $\mathbb{T} = -1.5$. 图 2(a) 为系统 (1) 和 (2) 在 R^3 上的相图, 图 2(b) 是系统 (1) 和 (2) 的同步误差演化. 由图 2 可见, 系统 (1) 和 (2) 很快实现投影同步, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y_i \rightarrow -1.5x_i, i = 1, 2, 3, 4$.

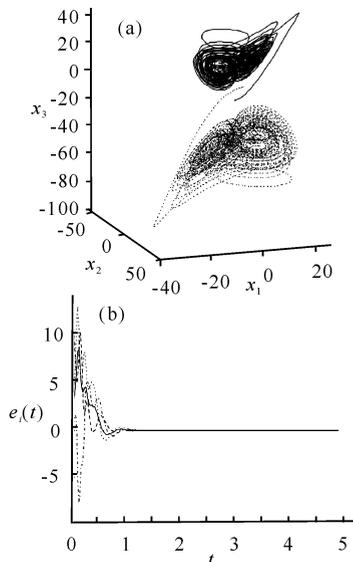


图 2 系统 (1) 和 (2) 的投影同步 ($\mathbb{T} = -1.5$)

Fig. 2 The GPS of the system (1) and (2) with $\mathbb{T} = -1.5$

(a) 两系统的吸引子在 R^3 上的相; —: $x(t)$; —·—: $y(t)$. (b) 误差系统随时间的演化. —: $e_1(t)$; ····: $e_2(t)$; - - -: $e_3(t)$; —·—: $e_4(t)$.

(a) Comparison of the attractors in R^3 ; (b) The time evolution of the error dynamical system.

图 3 展示了当参数部分未知时系统 (1) 与 (7) 实现广义同步. 这里取未知参数 $a_i = 35, b_i = 3, c_i = 15, d_i = 0.5$. 未知参数估计值的初始条件取为 $p_a(0) = 5, p_b(0) = 3, p_c(0) = 2, p_d(0) = -4$, 并取 $\mathbb{T} = 2$. 图 3(a) 为系统 (1) 和 (7) 在 R^3 相, 图 3(b) 是系统 (1) 和 (7) 的误差演化. 未知参数跟踪见图 4. 从图 3 和图

4可见,系统(1)和(7)很快实现投影同步,同时也实现了未知参数的跟踪识别.即当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $y_i \rightarrow 2x_i, i = 1, 2, 3, 4$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_a(t) = 35; \lim_{t \rightarrow \infty} p_b(t) = 3; \lim_{t \rightarrow \infty} p_c(t) = 15; \lim_{t \rightarrow \infty} p_d(t) = 0.5$.

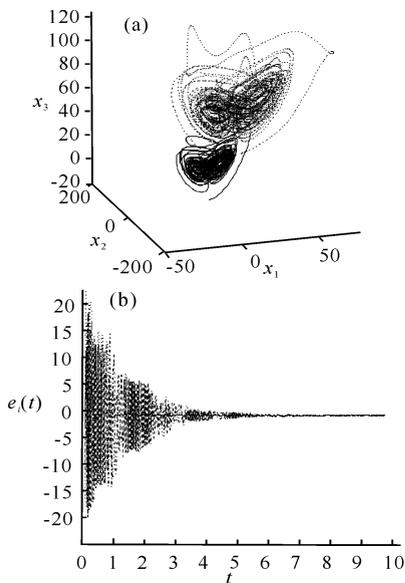


图3 系统(1)和(7)的投影同步 ($T=2$)

Fig. 3 The GPS of the system (1) and (7) with $T=2$

(a)两系统的吸引子在 R^3 上的相;—: $x(t)$; —: $y(t)$; (b)误差系统随时间的演化.—: $e_1(t)$; ·····: $e_2(t)$; -·-·-: $e_3(t)$; —: $e_4(t)$.

(a) Comparison of the attractors in R^3 ; (b) The time evolution of the error dynamical system.

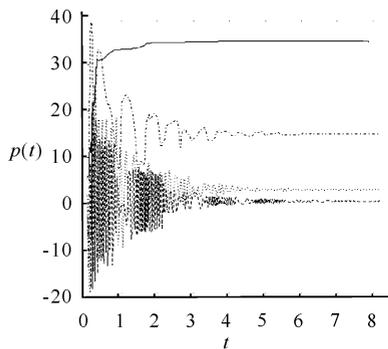


图4 未知参数跟踪情况

Fig. 4 The tracking situation of unknown parameters

—: $p_a(t)$; ·····: $p_b(t)$; -·-·-: $p_c(t)$; —: $p_d(t)$.

4 结束语

本文基于自适应控制方法和 Lyapunov 稳定性

理论,分别在参数完全未知和部分未知的情况下,设计了适合超混沌 Liu 系统的广义投影同步的非线性自适应控制器,使两个恒同超混沌 Liu 系统在全局范围内实现广义投影同步,并且在参数部分未知的情况下,实现了参数的跟踪.通过数值仿真验证了理论的正确性和所给方法的有效性.

参考文献:

- [1] Lorenz E N. Deterministic non-periodic flows [J]. J Atmos Sci, 1963, 20: 130-141.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [3] Chen G. Chaos, Control and anticontrol [J]. IEEE Circuits and Systems Society Newsletter, 1998, 9(1): 1-5.
- [4] Lu J, Chen G. A new chaotic attractor coined [J]. Int J of Bifurcation and Chaos, 2002, 12: 659-661.
- [5] Chen A, Lu J, Liu J, et al. Generating hyperchaotic Liu attractor via state feedback control [J]. Physica A, 2006, 364: 103-110.
- [6] Huberman A. Dynamics of adaptive systems [J]. IEEE Transactions on CAS, 1990, 37: 547-550.
- [7] 胡岗,萧井华,郑志刚.混沌控制 [M].上海:上海科技教育出版社, 2000.
- [8] Fang J Q, Hong Y G, Chen G R. Switching manifold approach to chaos synchronization [J]. Physical Review E, 1999, 59(3): 2523-2526.
- [9] Reggie B A. Unifying definition of synchronization for dynamical systems [J]. Chaos, 2000, 10(2): 344-349.
- [10] Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems [J]. Phys Rev Lett 1999, 82(15): 3042-3045.
- [11] Jia Z, Lu J A. Generalized projective synchronization of a class of chaotic (hyperchaotic) systems with uncertain parameters [J]. Chinese Physics, 2007, 16(05): 1246-1251.
- [12] 贾贞,陆君安,邓光明.超混沌 Liu 系统的非线性反馈自适应同步 [J].系统工程与电子技术学报, 2007, 29(2): 59-62.
- [13] Barbalat. Systems d'equations differentielle d'oscillations nonlineaires [J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1959, 59: 267.

(责任编辑:尹 闯)