DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.004
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 403~405

混合系数线性模型参数的可容许估计

An Admissible Estimate of Parameter in the Linear Model of Mixed Coefficient

李　娜，王　磊
LI Na, WANG Lei

(辽宁工程技术大学理学院应用数学系，辽宁阜新　123000)
(College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning, 123000, China)

摘要：利用二次损失函数和矩阵损失函数，给出混合系数线性模型的可估参数向量 Sd 在线性估计类中的可容许估计，并且分别讨论固定系数 T和随机系数期望 b的可容许估计.

关键词：线性模型　参数估计　可容许估计
中图法分类号：O212　文献标识码：A　文章编号：1005-9164(2009)04-0403-03

Abstract The linear estimator of estimable function is Sd admissible in the class of all linear estimators is proposed under quadratic loss function and matrix loss function. Then the dmissibility of fixed coefficient T and random expectation are also discussed b respectively.

Key words linear model, parameter estimate, admissible estimate

自从 1996年庄东辰等[1]提出混合系数线性模型之后，许多学者开始研究这种模型的参数估计.文献[1]最先给出固定系数和随机系数期望的两种无偏估计，并且讨论误差方差 e^2 的估计与随机系数方差 E 的估计.混合系数线性模型仍然存在着系数矩阵呈病态或者趋于病态的情况.在均方误差的意义下，为了能够提高估计的精度，刘小茂等[2]给出混合系数线性模型的 Stein估计；刘小茂等[3]给出这种模型参数的根方估计.本文在二次损失和矩阵损失下，给出混合系数线性模型的可估参数向量 Sd 在线性估计类中的可容许估计，并且讨论固定系数 T和随机系数期望 b的可容许估计.

1 模型

一般的混合系数线性模型具有形式：

$$Z(t)=[x(t)]'\mathrm{T}+[y(t)]'\mathrm{U},$$

其中，$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_p(t))'$；$y(t)=(y_1(t),\cdots,y_q(t))'$；$x_1(t),\cdots,x_p(t),y_1(t),\cdots,y_q(t)$都是 t的已知函数.T是 $p\times 1$的固定系数向量，U是 $q\times 1$的随机系数向量，且有 $\mathrm{U}\sim(b,\mathrm{E})$.现在对 m个样品分别在 $t_{i1}<\cdots<t_{in_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$时刻测得数据：

$$Z_{ij}=[x(t_{ij})]'\mathrm{T}+[y(t_{ij})]'\mathrm{U}_i+\mathrm{X}_{ij},\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n_i;\ n_i>p+q. \tag{1}$$

这里 U_i 和 X_{ij} 分别是每个样品的随机系数和每次测量的误差，且 $\mathrm{U}_i\overset{\text{i.i.d}}{\sim}(b,\mathrm{E})$，$\mathrm{X}_{ij}\overset{\text{i.i.d}}{\sim}(0,e^2)$，$\mathrm{U}_i$ 和 X_{ij} 相互独立.若记

$$Z_i=(Z_{i1},\cdots,Z_{in_i})',\ \mathrm{X}_i=(\mathrm{X}_{i1},\cdots,\mathrm{X}_{in_i})',$$

$$X_i=\begin{bmatrix} x_1(t_{i1}) & \cdots & x_p(t_{i1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1(t_{in_i}) & \cdots & x_p(t_{in_i}) \end{bmatrix},$$

$$Y_i=\begin{bmatrix} y_1(t_{i1}) & \cdots & y_q(t_{i1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1(t_{in_i}) & \cdots & y_q(t_{in_i}) \end{bmatrix},$$

则可得 $Z_i=X_i\mathrm{T}+Y_i\mathrm{U}_i+\mathrm{X}_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ \mathrm{U}_i\overset{\text{i.i.d}}{\sim}(b,\mathrm{E}),\ \mathrm{X}_i\overset{\text{i.i.d}}{\sim}(0,e^2I_{n_i})$.其中，$p\geqslant 0,q\geqslant 0$；当 $p=0$时模型化为完全随机系数的形式.C. R. Rao, Swamy S. Johansen等[4]对该模型参数估计及大样本性质作了一些研究.当 $q=0$时模型化为一般的线性模型.这里还要求 $\mathrm{Rank}(X_i)=p$，$\mathrm{Rank}(Y_i)=q$，那么 $\mathrm{Rank}(X_i,Y_i)\leqslant p+q$.

设 $C_i=(X_i,Y_i)$，$d=(\mathrm{T}',b')'$，$e_i=Y_i(\mathrm{U}_i-b)+\mathrm{X}_i$，则(1)式为

$$Z_i=C_id+e_i,\ i=1,2,\cdots,m,\ e_i\overset{\text{i.i.d}}{\sim}(0,Y_i\mathrm{E}Y_i'+$$

收稿日期：2008-09-24
修回日期：2008-12-02
作者简介：李　娜(1980-)，女，讲师，硕士，主要从事概率统计研究.

$\sigma^2 I_{n_i})$. (2)

进一步记 $Z=(Z_1',\cdots,Z_m')'$, $e=(e_1',\cdots,e_m')'$, $C=(C_1',\cdots,C_m')'$, $D=\mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_m)$, $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$, 其中 $D_i=Y_i\Sigma Y_i'+\sigma^2 I_{n_i}$, 则(2)式为

$$Z=Cd+e,\ e\sim(0,D). \quad (3)$$

若 S 为 $n\times(p+q)$ 矩阵, 其各行向量为 $s_1',\cdots,s_n'$, 即 $S'=(s_1,\cdots,s_n)$. 若 $s_i'd\ (i=1,2,\cdots,n)$ 皆可估, 则称向量 Sd 为可估的. 文献[1,5]已经得出混合系数线性模型参数估计的一些结果. 我们利用以下二次损失函数和矩阵损失函数寻找可估向量 Sd 在线性估计类 $\mathcal{H}$ 中的可容许估计.

$$L_1(Sd,AY)=(AY-Sd)'(AY-Sd),$$
$$L_2(Sd,AY)=(AY-Sd)(AY-Sd)',$$

其中 AY 为 Sd 的某线性估计, A 为 $n\times n$ 矩阵, $d=(\alpha',b')'$ 为 $p+q$ 维参数向量. 如果 AY 相对于线性估计类 $\mathcal{H}$ 在二次损失函数和矩阵损失函数之下为 Sd 的可容许估计, 则记为 $AY\sim Sd$.

2 模型可估参数向量 Sd 的可容许估计

在模型(2)中, $\mathrm{cov}(Z_i)=Y_i\Sigma Y_i'+\sigma^2 I_{n_i}=\sigma^2(\frac{1}{\sigma^2}Y_i\Sigma Y_i'+I_{n_i})$. 对于方差阵 Σ, 我们分 3 种情况来讨论:

(i) Σ 已知, 此时 $\mathrm{cov}(Z_i)$ 中仅含参数 σ^2;

(ii) Σ 未知时, 可用 $\sigma^2 I_q$ 来近似代替 Σ[5];

(iii) Σ 未知时, 用文献[1]中 Σ 的无偏估计 $\hat{\Sigma}$ 来近似代替 Σ.

无论上述哪种情况, 我们都不加区别的记

$$\mathrm{cov}(Z_i)=\sigma^2 M_i, \quad (4)$$

其中, 情况(i)中 $M_i=\frac{1}{\sigma^2}Y_i\Sigma Y_i'+I_{n_i}$; 情况(ii)中相应的 $M_i=Y_iY_i'+I_{n_i}$; 情况(iii)中相应的 $M_i=\frac{1}{\sigma^2}Y_i\hat{\Sigma}Y_i'+I_{n_i}$. 要根据 Σ 的已知或未知情况和估计精度的要求来确定 M_i 选取哪种形式. M_i 中所含的 σ^2 可以用文献[1,6]中的无偏估计 $\hat{\sigma}^2$ 来代替. 这样对于上述各种形式的 M_i, 有 $M_i>0$ 且已知.

由于

$$D=\mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_m)=\mathrm{diag}(Y_1\Sigma Y_1'+\sigma^2 I_{n_1},\cdots,Y_m\Sigma Y_m'+\sigma^2 I_{n_m})=\sigma^2 M, \quad (5)$$

其中, $M=\mathrm{diag}(M_1,\cdots,M_m)$. 由 M_i 的记法和文献[7]可知, $M>0$ 且已知.

引理 1 若在二次损失之下有 $AY\sim SU$, 则在矩阵损失下也有 $AY\sim SU$.

证明可参见文献[8]中引理 4.10 的证明.

定理 1 对于混合系数线性模型 $Z=Cd+e$, $e\sim N(0,\sigma^2 M)$, 若 Sd 可估, 则在二次损失之下 $AZ\sim Sd$ 的充要条件是

(1) $A=ACT^-C'M^{-1}$,

(2) $ACT^-C'A'\leqslant ACT^-S'$,

这里 $T=C'M^{-1}C$.

证明　证明 CT^-C', CT^-S' 与 T^- 的选取无关. 由于 $CT^-C'=C(C'M^{-1}C)^-C'=M^{\frac{1}{2}}\cdot M^{-\frac{1}{2}}C(C'M^{-\frac{1}{2}}\cdot M^{-\frac{1}{2}}C)^-C'M^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}=M^{\frac{1}{2}}\cdot P_{M^{-\frac{1}{2}}C}\cdot M^{\frac{1}{2}}$, $P_{M^{-\frac{1}{2}}C}$ 为 $R(M^{-\frac{1}{2}}C)$ 的投影阵, 所以与广义逆 $(C'M^{-1}C)^-$ 的选取无关, 即 CT^-C' 与广义逆 T^- 的选取无关.

又由于 Sd 可估, 则有 $S'=C'N'$ (N 为某适当矩阵), 所以 $ACT^-S'=ACT^-C'N'$ 也与 T^- 的选取无关. 那么 CT^-C' 与 CT^-S' 都是唯一确定的.

注意到条件(2)要求 ACT^-S' 为对称阵, 参考文献[8]中定理 4.5 便可以证明定理 1.

定理 2 对于模型(3), 若 Sd 可估, 则在二次损失和矩阵损失下, $Sd^*\sim Sd$, 其中, $d^*=(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}Z$.

证明　首先证明 Sd^* 的唯一性.

若 Sd 可估, 则 $S'=C'N'$ 即 $S=NC$ (N 为某适当矩阵). 那么 $Sd^*=NC(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}Z=NM^{\frac{1}{2}}P_{M^{-\frac{1}{2}}C}M^{-\frac{1}{2}}Z$. 而 $P_{M^{-\frac{1}{2}}C}$ 与广义逆的选取无关, 所以 Sd^* 唯一.

再证明 Sd^* 是可估向量 Sd 在线性估计类中的可容许估计.

设 $Sd^*=S(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}Z=AZ$, 即 $A=S(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}$, 则

$$Sd^*\sim Sd\Leftrightarrow AZ\sim Sd. \quad (6)$$

由于 $ACT^-C'M^{-1}=S(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}CT^-C'M^{-1}=A$, 即定理 1 中条件(1)成立. 又由于

$$ACT^-C'A'=S(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}CT^-C'M^{-1}C(C'M^{-1}C)^-S'=S(C'M^{-1}C)^-S',$$

$$ACT^-S'=S(C'M^{-1}C)^-C'M^{-1}CT^-S'=S(C'M^{-1}C)^-S',$$

即定理 1 中条件(2)成立. 那么由定理 1, 有 $AZ\sim Sd$, 再由(6)式得到二次损失下 $Sd^*\sim Sd$. 又由于引理 1 可知矩阵损失下 $Sd^*\sim Sd$.

3 固定系数 α 和随机系数期望 b 时模型的可容许估计

定理 3 对于模型(3), 当 $rk(C)=p+q$ 时, 在

二次损失和矩阵损失下, $\tilde d \sim d$, 其中 $\tilde d = (C'M^{-1}C)^{-1}C'M^{-1}Z$.

证明 由于 $rk(C)=p+q$,则参数向量 d 是可估的.因为 $\hat d_{LS}=(C'C)^{-1}C'Z$ 就是 d 的一个无偏估计,即 $E(\hat d_{LS})=(C'C)^{-1}C'Cd=d$.

在定理 2中,由于 d 是可估向量,可以取 $S=I$,得到 $d^* \sim d$.因为矩阵 C 为列满秩阵,则 $d^* = (C'M^{-1}C)^- C'M^{-1}Z = \tilde d$.那么在二次损失和矩阵损失下 $\tilde d \sim d$.

定理 2表明,我们所确定的混合系数线性模型参数估计 $\tilde d$ 在一致优于的意义下,具有很好的性质.即在二次损失或矩阵损失下对于参数 $d=(\beta',b')'$,当 $rk(C)=p+q$ 的时候,要在线性估计类 $\mathcal{L}$ 中寻求一个比 $\tilde d$ 有改善的估计是不可能的,但是在非线性估计类中是可能的.

对于混合系数线性模型(3),文献[8]中给出了固定系数 β 和随机系数期望 b 的一种无偏估计. β 的无偏估计为 $\tilde\beta=(X'QX)^{-1}X'QZ$, b 的无偏估计为 $\tilde b=(Y'PY)^{-1}Y'PZ$.这里,

$$P=M^{-1}-M^{-1}X(X'M^{-1}X)^{-1}X'M^{-1},\ Q=M^{-1}-M^{-1}Y(Y'M^{-1}Y)^{-1}Y'M^{-1}.$$

事实上,由于 $\tilde d=(C'M^{-1}C)^{-1}C'M^{-1}Z$,并且可以验证 $\tilde d=(\tilde\beta',\tilde b')'$ 成立,那么有如下定理.

定理 4 对于混合系数线性模型(3)和(5)式的记法,当 $rk(C)=p+q$ 时,在二次损失或矩阵损失之下, $\tilde\beta\sim\beta$, $\tilde b\sim b$.

证明 由条件和定理 3可以得到 $\tilde d\sim d$,即 $\begin{pmatrix}\tilde\beta\\ \tilde b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\beta\\ b\end{pmatrix}$.那么在二次损失下,估计量 $\tilde d=\begin{pmatrix}\tilde\beta\\ \tilde b\end{pmatrix}$ 的风险函数为

$$R(\tilde d,d)=E(\tilde d-d)'(\tilde d-d)=E\begin{pmatrix}\tilde\beta-\beta\\ \tilde b-b\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\tilde\beta-\beta\\ \tilde b-b\end{pmatrix}=E(\tilde\beta-\beta)'(\tilde\beta-\beta)+E(\tilde b-b)'(\tilde b-b).$$

设 LZ 为参数 d 的任意一个线性估计,其中 L 为 $(p+q)\times n$ 矩阵.不妨设 $L=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\end{pmatrix}$, L_1 为 $p\times n$ 矩阵, L_2 为 $q\times n$ 矩阵.那么 L_1Z,L_2Z 分别为参数 β 和 b 的任意无偏估计.二次损失下,参数 d 的任意一个线性估计 LZ 的风险函数为

$$R(LZ,d)=E(LZ-d)'(LZ-d)=E(L_1Z-\beta)'(L_1Z-\beta)+E(L_2Z-b)'(L_2Z-b),$$

由于 $\tilde d\sim d$,则 $R(\tilde d,d)\leqslant R(LZ,d)$,即 $E(\tilde\beta-\beta)'(\tilde\beta-\beta)+E(\tilde b-b)'(\tilde b-b)\leqslant E(L_1Z-\beta)'(L_1Z-\beta)+E(L_2Z-b)'(L_2Z-b)$.事实上 $E(\tilde\beta-\beta)'(\tilde\beta-\beta)\leqslant E(L_1Z-\beta)'(L_1Z-\beta)$ 一定成立.否则,存在 $d^*=\begin{pmatrix}L_1Z\\ \tilde b\end{pmatrix}$.作为参数 d 的估计,其风险函数要小于 $\tilde d$ 的风险函数,这与 $\tilde d\sim d$ 相矛盾.同理,对于随机系数期望 b, $E(\tilde b-b)'(\tilde b-b)\leqslant E(L_2Z-b)'(L_2Z-b)$ 也一定成立.那么,在二次损失或矩阵损失下, $\tilde\beta\sim\beta$, $\tilde b\sim b$.

参考文献:

[1] 庄东辰,茆诗松.混合系数线性模型的参数估计[J].应用概率统计,1996,12(2):81-87.

[2] 刘小茂,茆诗松.混合系数线性模型参数的 Stein估计[J].数学物理学报,2001,21(4):453-457.

[3] 刘小茂,张钧.混合系数线性模型参数的根方估计[J].华中理工大学学报,1997,25(3):111-112.

[4] Johansen S. Asumptotic inference on random coefficient regression models[J]. Scand J Statist,1982(9):201-207.

[5] 潘晋孝,薛亚奎.混合系数线性模型的参数的一种新估计[J].华北工业学院学报:自然科学版,1998,19(4):283-285.

[6] 李娜.混合系数线性模型参数的一种估计[J].高等数学通报,2005,54 64-66.

[7] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组.高等代数[M].第二版.北京:高等教育出版社,1982.

[8] 陈希孺.线性模型参数的估计理论[M].北京:科学出版社,1985:192-195.

(责任编辑:尹 闯)