DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.011
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 379~ 380, 384

涉及不动点的全纯函数的正规族

On Normal Families of Holomorphic Functions Concerning Fix-point

李运通,杨建效

LI Yun-tong, YANG Jian-xiao

(陕西铁路工程职业技术学院基础课部,陕西渭南 714000)

(Department of Basic Course, Shannxi Railway Institute, Weinan, Shannxi, 714000, China)

摘要: 研究正规族与分担值之间的关系,得出: 若 F 是区域 D 上的一族全纯函数族,$p(z)$ 为次数 $\geqslant 2$ 的多项式,如果对任意的 $f,g\in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,则 F 在 D 上正规.

关键词: 全纯函数 正规族 分担值 不动点

中图法分类号: O174.52 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0379-02

Abstract Some normality criterion concerning shared values are considered, and the following result is obtained: Let F be a family of analytic functions defined in a domain D, and $p(z)$ be a polynomial with degree $deg(p(z))\geqslant 2$. If for every pair of function $f,g\in F$ such that $p(f)$ and $p(g)$ share z in D, then F is normal in D.

Key words: holomorphic functions, normal family, shared value, fix-point

设区域 D 定义在复平面 C 上,F 为区域 D 内一族亚纯函数.如果从 F 的每一个函数序列 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 中均可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,\cdots)$ 在区域 D 上按球面距离一致收敛为一个亚纯函数或者恒为无穷,则称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 上正规.

设 f 与 g 为平面区域 D 上两个非常数的亚纯函数,a 为有穷复数,定义 $\overline{E_f}(a)=\{z\in D: f(z)=a\}$. 称 f 与 g 以 a 为 IM 公共值,是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同,记作 $\overline{E_f}(a)=\overline{E_g}(a)$. 称 f 与 g 以 a 为 CM 公共值,是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同,且零点的重数也相同[1,2].

1952年, Rosenbloom[3]得出结论: 设 $p(z)$ 为次数 $\geqslant 2$ 的多项式,且 $f(z)$ 为超越整函数,则 $p\{f(z)\}$ 有无穷多个不动点. 方明亮,袁文俊[4,5]得出结论: 设 F 是区域 D 上的一族全纯函数族,$p(z)$ 为次数 $\geqslant 2$ 的多项式,如果对任意的 $f\in F$,有 $p(f)\neq z$,则 F 在 D 上正规. 本文证明了与多项式复合全纯函数分担不动点相关的正规定则,改进了文献 [4,5] 的结论.

1 相关引理

引理 1[6] (Zalcman 引理) 设 k 是一正整数,F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,对任意的 $f\in F$,并且 f 的所有零点重数 $\geqslant k$; 若存在常数 $A\geqslant 1$,使得当 $f(z)=0$ 时,$|f^{(k)}(z)|\leqslant A$,则 F 在 $z_0\in\Delta$ 的任一领域内不正规的充要条件是存在

(1) 函数列 $f_n\in F$,

(2) 复数列 $z_n\to z_0, z_n\in D$,

(3) 正数列 $\rho_n\to 0$,使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)\to g(\xi)$ 按球面距离内闭一致收敛. 其中 $g(\xi)$ 为复平面 C 上的非常数亚纯函数,$g(\xi)$ 为有穷级,且 $g^{\#}(\xi)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$.

引理 2[1] 若 F 是区域 D 上的一族局部有界全纯函数族,则 F 在 D 上正规.

引理 3[7] 设 $f(z)$ 为有穷级开平面亚纯函数,则 $f(z)$ 的 Borel 例外值至多有 2 个.

2 主要结果

定理 1 设 F 是区域 D 上的一族全纯函数族,$p(z)$ 为次数 $\geqslant 2$ 的多项式,如果对任意的 $f,g\in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,则 F 在 D 上正规.

证明 情况 1 当每一个值 $z^*\in D, p(z)-z^*$

收稿日期: 2009-06-12

作者简介: 李运通 (1982-),男,硕士研究生,主要从事单复变函数方面的研究.

至少有两个不同的零点 a 和 b 时.若 F 在 D 上不正规,则至少存在一点 z_0 使得 F 在 z_0 不正规.不失一般性,不妨假设 $z_0 = 0$.由引理 1知:存在函数列 $f_n \in F$,复数列 $z_n \to z_0, z_n \in D$,

正数列 $d_n \to 0$,使得

$$g_n(Y) = f_n(z_n + d_n Y) \to g(Y) \quad (1)$$

按球面距离内闭一致收敛.其中 $g(Y)$ 为复平面 C上的非常数亚纯函数,$g(Y)$ 为有穷级,且 $g^{\#}(Y) \leqslant g^{\#}(0) = 1$.

因为 $p(z)$ 为多项式,由(1)式得

$$p(g_n)(Y) = p(g_n)(z_n + d_n Y) - (z_n + d_n Y) \to p(g)(Y) \quad (2)$$

按球距一致收敛.因为 $g(Y)$ 是非常数函数,因此 $p(g)(Y) \not\equiv 0$.若 $p(g)(Y) \neq 0$,则 $g(Y) \neq a, b$.当 $g(Y)$ 为多项式时,显然 $p(g)(Y)$ 至少有两个不同的零点.当 $g(Y)$ 为超越整函数时,则由 Picard定理,可以推出 $g(Y)$ 为一常数,因此 $p(g)(Y)$ 一定有零点.又因为 $p(Y)$ 为多项式和 $g(Y)$ 为有穷级整函数,则 $p(g)(Y)$ 也为有穷级整函数.由引理 3得,则 $p(g)(Y)$ 一定有无穷个零点.我们断言 $p(g)(Y)$ 有且仅有一个零点.若有两个不同的零点 Y_0 和 Y_0^*,选择充分小的 W,使得充分小的两个邻域 $D(Y_0, W) \cap D(Y_0^*, W) = \varnothing$,其中 $D(Y_0, W) = \{Y \mid |Y - Y_0| < W\}$,$D(Y_0^*, W) = \{Y \mid |Y - Y_0^*| < W\}$.由(2)式和 Hurwitz定理[1]知,存在点列 $Y_n \in D(Y_0, W)$ 和 $Y_n^* \in D(Y_0^*, W)$,使得对于充分大的 n 有 $p(f_n)(z_n + d_n Y_n) - (z_n + d_n Y_n) = 0$,$p(f_n)(z_n + d_n Y_n^*) - (z_n + d_n Y_n^*) = 0$.

因为对任意的 $f, g \in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,对于任意的正整数 m 有 $p(f_m)(z_n + d_n Y_n) - (z_n + d_n Y_n) = 0$,$p(f_m)(z_n + d_n Y_n^*) - (z_n + d_n Y_n^*) = 0$.固定 m,当 $n \to \infty$,注意到 $z_n + d_n Y_n \to 0$,$z_n + d_n Y_n^* \to 0$,则 $p(f_m)(0) = 0$.

因为 $p(f_m)(z)$ 的零点没有聚点,对于充分大的 n 有 $z_n + d_n Y_n = 0$,$z_n + d_n Y_n^* = 0$,因此 $Y_n = -\frac{z_n}{d_n}$,$Y_n^* = -\frac{z_n}{d_n}$.这与 $Y_n \in D(Y_0, W)$,$Y_n^* \in D(Y_0^*, W)$ 和 $D(Y_0, W) \cap D(Y_0^*, W) = \varnothing$ 相矛盾.因此 $p(g)(Y)$ 有且仅有一个零点,与 $p(g)(Y)$ 有无穷多个零点相矛盾.

情况 2 假如存在值 $z_0 \in D$,使得 $p(z) - z_0$ 仅有一个零点 a 时,则 $p(z) = z_0 + A(z-a)^l$,其中 $l \unrhd 2$ 为正整数,A 为非零常数.显然存在空心邻域 $D' = D - \{z_0\}$.我们断言 F 在 D' 上正规.注意到对每一个 $z^* \in D'$,$p(z) - z^*$ 至少有两个不同的零点,首先用情况 1相同的方法,则可能得出 F 在 D' 上正规.其次,我们证 F 在点 $z_0 = 0$ 上正规.因为 F 在 D' 上正规,则存在子函数列 $\{f_n\} \subset F$ 在 D 上一致收敛于函数 f,其中 f 为整函数或者恒为无穷,且在 D' 上

$$p(f_n) - z \to p(f) - z. \quad (3)$$

情况 2.1 若 f 为整函数,考虑圆周 $S_r = \{z: |z| = r\} \subset D'(r > 0)$,则存在 $M > 0$,使得在 S_r 上 $|f| < M$,因为 $\{f_n\} \subset F$ 在 D' 上一致收敛于 f,对于充分大的 n 在 S_r 上有,$|f_n| < 2M$.由最大模原理知,在邻域 $\{z: |z| < r\}$ 上有 $|f_n| < 2M$.由引理 2知,F 在 D 上正规.

情况 2.2 若在 D' 上 $f \equiv \infty$.则在 D' 上

$$p(f) - z \equiv \infty. \quad (4)$$

假设 F 在点 z_0 不正规,我们断言存在点列 $z_n \to z_0$,$z_n \in D$,以及子函数列 $\{f_n\} \subset F$,使得 $p(f_n)(z_n) - z_n = 0$.如果 $p(f_n)(z) - z \neq 0$,则 $1/p(f_n)(z) - z \to 0$,由情况 2.1得,F 在 D 上正规.若 $p(f_n)(z) - z = 0$,但是不存在一列点 $z_n \to z_0$,则存在一个小邻域 $\{z: |z| < r_1\} \subset \{z: |z| < r\}$,使得在这个邻域上有 $p(f_n)(z) - z \neq 0$.由上面的分析可知 F 在点 z_0 正规.因此存在点列 $z_n \to z_0$,$z_n \in D$,和子函数列 $\{f_n\} \subset F$,使得 $p(f_n)(z_n) - z_n = 0$.因为对任意的 $f, g \in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,与情况 1相同的讨论得,对于充分大的 n 有 $z_n = z_0$.因为 $p(z) = z_0 + A(z-a)^l$,因此 $p(f_n) - z = A(f_n - a)^l - (z - z_0)$,且 $A(f_n - a)^l(z_0) = p(f_n) - z_0 = 0$,因此 $p(f_n) - z = (z - z_0)((z - z_0)^{l-1} h_n(z) - 1)$,其中 $h_n(z)$ 为解析函数.令 $F_n = (z - z_0)^{l-1} h_n(z) - 1$.由(3)式和(4)式知,在 D' 上 $F_n(z) \to \infty$,由 $l \unrhd 2$ 得,$F_n(z_0) = -1$,且 $\{F_n(z)\}$ 在 D' 上正规,而在点 z_0 不正规.利用上面相同的讨论有,点列 $z_n^* \to z_0$,$z_n^* \in D$ 使得 $F_n(z_n^*) = 0$,且 $z_n^* \neq z_0$.因为对任意的 $f, g \in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,且 $z_n^* \neq z_0$,因此,对任意的 m 有 $p(f_n)(z_n^*) - z_n^* = (z_n^* - z_0) F_m(z_n^*) = 0$,因此 $p(f_n) - z$ 在 D 上有无限多个零点,由唯一性定理有 $p(f_n) = z$,这与 $p(z)$ 的次数至少为 2相矛盾.因此 F 在 D 上正规.

例 1 设 $p(z) = z$,$F = \{f_n(z) = z + e^{nz}\}$,$D = \{z: |z| < 1\}$.易知在 D 上 $p(f_n) \neq z$,所以对任意的 $f, g \in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z.而显然 F 在点 $z = 0$ 不正规.

例 2 设 $p(z) = z^2$,$F = \{f_n(z) = z^n\}$,$D = \{z: |z| < 1/2\}$.易知在 D 上 $p(f_n) - z$ 只有一个零点 $z = 0$,所以对任意的 $f, g \in F$,有 $p(f)$ 和 $p(g)$ 在 D 上 IM 分担 z,而显然解析函数族 F 在 D 正规.

上面例子说明定理 1中的条件是必须的.显然,应

(下转第 384页 Continue on page 384)

$$X^* \approx \begin{bmatrix} 0.2460 & 0.0859 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1613 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.1256 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 & -0.0002 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0383 & -0.0003 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0858 & -0.0378 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0033 & -0.1258 & -0.1622 & 0.2452 & 0.0851 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0007 & -0.0032 & -0.1239 & -0.1580 & 0.2435 \end{bmatrix},$$

表 1 **GUALE的亚正定解误差与采样周期的关系 (迭代次数 $k = 25$)**

Table 1 GUALE sub-definite solution of the relationship between errors and the sampling period (number of iterations $k = 25$)

采样周期 Sampling period	$n = 10$			$n = 100$		$n = 500$	
	$\lVert\theta A + I\rVert_2$	Error	Time(s)	Error	Time(s)	Error	Time(s)
$\theta = 0.1$	0.7584	5.3236e-008	0.0216	5.4604e-008	0.0990	5.4604e-008	9.3091
$\theta = 0.4$	0.2743	0	0.0256	3.1342e-031	0.0979	3.1342e-031	9.3272
$\theta = 0.47$	0.4970	8.1460e-017	0.0228	1.2077e-016	0.1163	1.2077e-016	9.3123

计算出 $\lambda_{\min}(R(X^*)) = 0.0276 > 0$, $\lambda_{\max}(R(X^*)) = 0.3933$. 因此, X^* 是所给统一代数 Lyapunov 矩阵方程的一个 10阶亚正定解,且 $0 < R(X^*) \leqslant 0.8370I$. 这与本文的理论结果相符合.

表 1结果显示,不同的采样周期 θ 对迭代 (5)的收敛性影响较大. 就本文算例而言,当选择 θ 在 0.4附近时的解具有较高精度.

参考文献:

[1] Johnson C R. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[2] 屠伯埙. 亚正定阵理论 (I) [J]. 数学学报, 1990, 33(4): 462-471.

[3] 屠伯埙. 亚正定阵理论 (II) [J]. 数学学报, 1991, 34(1): 991-1002.

[4] Zoran Gajic. Lyapunov matrix equation in system stability and control[M]. San Diego: Rutgers University Academic Press, San Diego, CA, 1995.

[5] 邵锡军, 杨成梧. Delta域 Lyapunov 矩阵方程解的研究 [J]. 南京理工大学学报, 1999, 23(3): 193-196.

[6] 张端金, 杨萃, 吴捷. 基于 Delta算子的统一代数 Lyapunov方程解的上下界 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(1): 94-97.

[7] 张凯院, 徐仲. 数值代数 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 380页 Continue from page 380)

用文献 [4, 5]中的定理并不能判定例 2是否正规,而用定理 1就能判定,所以定理 1推广了文献 [4, 5]中的相关结论.

参考文献:

[1] Schiff J. Normal families [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[2] Gu Y X, Pang X C, Fang M L. Normal families and it's application[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[3] Rosenbloom PC. The fix-poionts of entire functions [J]. Comm Sem Math Univ Lund [Medd. Lunds Univ Mat Sem], 1952, 186-192.

[4] Fang M L, Yuan W J. On Rosenbloom's fix-points theorem and related results[J]. J Austral Math Soc Series A, 2000, 68: 321-333.

[5] Fang M L, Yuan W J. On the normality for families of meromorphic functions[J]. Indian J Math, 2001, 43: 341-351.

[6] Zalcman L. Normal families: New perspectives[J]. Bull Amer Math Soc, 1998, 35: 215-230.

[7] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

(责任编辑: 尹 闯)