DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(4): 357~358

关于有限群的 δ-子群*

On δ-subgroups of Finite Groups

卢家宽[1],李世荣[2]
LU Jia-kuan[1], LI Shi-rong[2]

(1.上海大学数学系,上海 200444; 2.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, 200444, China; 2. Department of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 给出有限群 W-子群的定义,并利用该定义得到超可解群的充分条件.
关键词: 有限群 W-子群 超可解群
中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)04-0357-02
Abstract The definition of W-subgroup is given. Some sufficient conditions for supersolvability of finite groups are obtained.
Key words finite group, δ-subgroup, supersolvable group

苏向盈在文献[1]中首次给出半正规子群的概念: 群 G 的子群 H 称为半规子群,如果存在 $B \leqslant G$ 使得 $G = HB$,并且 $HX < G$ 对任意 $X < B$ 成立.王品超在文献[2]中利用半正规性得到了超可解群的一列充分条件.本文给出有限群 W-子群的定义,并利用该定义得到超可解群的若干充分条件.我们只考虑有限群.

1 定义及性质

定义 1 有限群 G 的子群 H 称为 W-子群,如果存在 $B \leqslant G$ 使得 $G = HB$,并且 $N_G(H)X = XN_G(H)$ 对任意 $X \leqslant B$ 成立.

性质 1 设 $H \leqslant K \leqslant G$, H 是 G 的 W-子群,则 H 也是 K 的 W-子群.

证明 设 H 是 G 的 W-子群.由 W-子群的定义,存在 $B \leqslant G$ 使得 $G = HB$.于是 $K = H(K \cap B)$.令 $B_1 = K \cap B$,则 $K = HB_1$.对任意 $X \leqslant B_1$,则也有 $X \leqslant B$,于是 $N_G(H)X = XN_G(H)$.这样,$K \cap (N_G(H)X) = X(K \cap N_G(H)) = XN_K(H)$ 是子群,故 H 是 K 的 W-子群.

性质 2 设 P 为 G 的 p-子群,$N \trianglelefteq G$,且 $(|N|, p) = 1$.如果 P 是 G 的 W-子群,那么 PN/N 也为 G/N 的 W-群.

证明 因为 P 是 G 的 W-子群.由 W-子群的定义,存在 $B_1 \leqslant G$ 使得 $G = PB_1$.于是,$G/N = PB_1/N = (PN/N)(B_1N/N)$. 令 $B = B_1N$, 则 $G/N = (PN/N)(B/N)$.对任意 $X/N \leqslant B/N$,有 $X = X \cap B = N(X \cap B_1)$.于是,$N_G(P)(X \cap B_1)$ 是子群.这样,由[3,II,命题 2.6],知 $N_G(P)(X \cap B_1)N/N = N_G(P)X/N = (N_G(P)N/N)(X/N) = N_{G/N}(PN/N)(X/N)$ 是子群.故 PN/N 为 G/N 的 W-子群.

性质 3 设 P 为 G 的 Sylow p-子群,$N \trianglelefteq G$.如果 P 是 G 的 W-子群,那么 PN/N 是 G/N 的 W-子群.

性质 4 设 $N \leqslant H \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$.如果 H 为 G 的 W-子群,则 H/N 也为 G/N 的 W-子群.

2 主要结果

定理 1 若群 G 的每个极大子群是 W-子群,则 G 超可解.

证明 设 H 是 G 的极大子群.因为 H 是 W-子群,由定义 1,存在 $B \leqslant G$ 使得 $G = HB$,且对 B 的任意子群 X,恒有 $N_G(H)X = XN_G(H)$.选择这样的子群 B 使得其阶尽可能小.假定 $H \trianglelefteq G$.由 H 是 G 的极大子群,有 $N_G(H) = H$.于是对 B 的任意子群 X,恒有 $HX = XH$.令 B_1 是 B 的极大子群,则 HB_1 是子群.由 H 的极大性,有 $HB_1 = H$ 或 $HB_1 = G$.如果

收稿日期: 2009-03-05
修回日期: 2009-05-05
作者简介: 卢家宽(1980-),男,博士研究生,主要从事有限群论研究。
* 国家自然科学基金项目(10161001),广西自然科学基金项目(0249001),上海大学创新基金项目资助。

$HB_1 = G$,则对 B_1的任意子群 X_1,也有 $X_1 \leqslant B$.于是 $N_G(H)X_1 = X_1N_G(H)$.这与 B的选择矛盾.因此,$HB_1 = H$,于是 B的有唯一极大子群并且含于 H.推出 B是循环 p-群,并且 $|G:H| = p$.当 $H \trianglelefteq G$时,也有 B是阶循环 p-群,且 $|G:H| = p$.由 Huppert定理 [4, IX,定理 1.12],知 G超可解.

注 假定群 G的每个 2-极大子群是 G的 W-子群,则 G不一定超可解.例如 A_4.假定群 G的每个 Sylow子群的极大子群是 G的 W-子群,则 G不一定超可解.例如 A_4.

定理 2 若群 G的每个 Sylow子群是 W-子群,则 G超可解.

证明 (1) 证明 G可解.

设 p为 $|G|$ 的最大素因子,P为 G的 Sylow p-子群.若 $N_G(P) < G$,由定理 2假设,存在 $B \leqslant G$使得 $G = PB$,且 $N_G(P)X = XN_G(P)$成立,对 B的任意子群 X.显然,B中有 q-元 x,使得 $x \notin N_G(P)$,其中 q为素数,且 $q \neq p$.选择这样的 q-元 x 使 x 的阶尽可能小,则有 $x^q \in N_G(P)$.因为 $x \in B$,所以 $T = \langle x \rangle N_G(P)$ 是子群.于是,

$$|T| = |\langle x \rangle N_G(P)| = \frac{|\langle x \rangle||N_G(P)|}{|\langle x \rangle \cap N_G(P)|} = q|N_G(P)|.$$

由 Sylow定理,T中 Sylow p-子群的个数为 $sp+1$,且 $sp+1 | q$.因为 $s \neq 0$,所以 $p | q-1$,这与 p为 $|G|$ 的最大素因子矛盾.故有 $N_G(P) = G$,即 $P \trianglelefteq G$.考虑商群 G/P.设 U/P 为 G/P 的 Sylow q-子群.由 Shur-Zassenhaus定理,知 U有 p-补 Q.显然,Q也是 G的 Sylow q-子群.于是,由性质 3,知 $U/P = PQ/P$也是 G/P的 W-子群.这样,G/P满足假设.由归纳知,G/P可解,从而 G可解.

(2) 证明 G超可解.

设 N为 G的极小正规子群.由 G的可解性,N为初等交换 p-群.由性质 3和性质 4,知 G/N 满足定理 2条件.由归纳,G/N 超可解.从而也推出 N 的唯一性.若 $N \leqslant \Phi(G)$,则 $G/\Phi(G)$超可解,从而 G超可解.故可设 $N \nleqslant \Phi(G)$.于是 G有极大子群 M,使得 $G = NM$,且 $N \cap M = 1$.设 q为 $|M|$ 的最大素因子,Q为 M的 Sylow q-子群.显然,$q \neq p$.因为 M超可解,所以 $Q \trianglelefteq M$.由 M的极大性及 N的唯一性,有 $N_G(Q) = M$.显然,Q也是 G的 Sylow q-子群.由定理 2假设,存在 $B \leqslant G$使得 $G = QB$,且对 B的任意子群 X有 $N_G(Q)X = XN_G(Q)$成立.由于 Q是 G的 Sylow q-子群,故有 $M = N_G(M)$.于是,$N_G(Q) = N_G(M)$.这样,$G = MB$,且 $N_G(M)X = XN_G(M)$成立,对 B的任意子群 X.这说明 M也是 G的 W-子群.由定理 2.1的证明,知 $|G:M| = p$,即 $|N| = p$.于是由 [5,定理 1.2],G超可解.

从定理 2的证明可以得到:

推论 1 设 G是有限群,q是 G的阶的最大素因子,Q是 G的 Sylow q-子群.如果 Q是 G的 W-子群,那么 Q是 G的正规子群.

参考文献:

[1] 苏向盈.有限群的半正规子群 [J].数学杂志,1988,8(1): 5-9.

[2] 王品超.超可解群的若干充分条件 [J].数学学报,1990,33(4): 480-495.

[3] 徐明曜.有限群导引: 上册 [M].北京: 科学出版社,2001.

[4] 徐明曜,李慧陵,李世荣,等.有限群导引: 下册 [M].北京: 科学出版社,2001.

[5] 张远达,朱德高,樊恽,等.幂零与可解之间 [M].武汉: 武汉大学出版社,1988.

(责任编辑: 尹 闯)

火星曾经三分之一表面覆盖海洋

科学家利用新软件对火星表面进行分析,发现火星曾有三分之一的表面被海洋覆盖。他们在赤道和中南纬度之间的狭长地带找到了,比以前科学家在火星上发现的、多出 1倍多的溪谷,绘制成迄今为止最为详细的火星溪谷图。这张新图是利用卫星数据进行电脑分析产生的,已经标出曾经从这颗红色行星南部高地流向北部海洋的河流路径。该图显示,火星上一些地区的溪谷网比地球上的更加稀疏,一些地区的溪谷网的稠密度又几乎跟地球上的一模一样,所以现在还很难说出火星溪谷网形成的主要机制。火星历史早期的这个潮湿阶段可能大大增加了它上面孕育生命的机会。现在火星上非常寒冷干燥,它上面的河流和海洋早已消失。火星大气层非常稀薄,如果这颗红色行星上有微生物存在,它们一定艰难地生活在布满灰尘的火星地表下。

(据科学网)