两两 NQD 列的几乎处处收敛性*

The Almost Sure Convergence of Pairwise Negative Quadrant Dependent

陈晓林,吴群英
CHEN Xiao-lin,WU Qun-ying

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004,China)

摘要:利用吸引域和慢变函数的概念给出两两 NQD 列几乎处处收敛的充分条件.

关键词:两两 NQD 列 几乎处处收敛 吸引域 慢变化函数
中图法分类号:O211.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2009)03-0260-04

Abstract:Some sufficient conditions on the almost sure convergence of pairwise NQD are obtained by using the concept about domain of attraction and slowly varying function.

Key words: negative quadrant dependent, almost sure convergence, domain of attraction, slowly varying function

两两 NQD 列的概念是由著名统计学家 Lehmann[1]于 1966 年提出的,它是比 NA 列和 ND 列更为广泛的一种随机变量列,对 NQD 列的研究很有必要.吴群英[2]、王岳宝[3]等人对 NQD 列有过很多的研究成果.本文将给出两两 NQD 在一定条件下的几乎处处收敛性.我们约定,$A \sim B$ 表示 $A/B \to 1$;$a_n \ll b_n$ 表示存在一正常数 C,当 n 充分大时 $a_n \leqslant Cb_n$.

1 定义及引理

定义 1 称随机变量 X 和 Y 是 NQD(Negatively Quadrant Dependet) 的,如果对任意 $x,y \in R$ 都有 $P(X<x,Y<y) \leqslant P(X<x)P(Y<y)$.称随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两 NQD 的,若对任意 $i\neq j$,X_i 与 Y_j 是 NQD 的.

设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是具有相同的非退化分布函数 F 且均值为零的随机变量列,记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j,n\geqslant 1$.称 F 为吸收范围 $\alpha\in(0,2)$ 上的一个平稳分布,若对于任意的 $x>0$ 满足

$$1-F(x)=\frac{c_1(x)l(x)}{x^{\alpha}} \text{和} F(-x)=\frac{c_2(x)l(x)}{x^{\alpha}}, \tag{1.1}$$

其中当 $x>0$,$c_i(x)\geqslant 0$,$\lim\limits_{x\to\infty}c_i(x)=c_i$,$i=1,2$,$c_1+c_2>0$,且 $l(x)\geqslant 0$ 是慢变化函数,即对于任意的 $x>0$,$l(x)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{l(tx)}{l(t)}=1$.

由文献[4]可知,$l(x)$ 是慢变化函数的充分必要条件是对于任意的 $x>0$,$l(x)=c(x)\exp\{\int_{l}^{x}f(u)/u\mathrm{d}u\}$,其中 $c(x)\geqslant 0$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}c(x)=c>0$,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

引理 1[5] 设 $\{A_n;n\geqslant 1\}$ 是一事件列.若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$,则 $P(A_n;\text{i.o.})=0$;若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$,则 $P(A_iA_j)\leqslant P(A_i)P(A_j)$,$i\neq j$,则 $P(A_n;\text{i.o.})=1$.

引理 2[2] 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是均值为零的两两 NQD 列,且 $\sum_{i=1}^{n}EX_i^2<\infty$.则对于任意 $\varepsilon>0$,

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>\varepsilon)\leqslant \varepsilon^{-2}E(\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i^2)\ll \ln^2 n\sum_{i=1}^{n}EX_i^2.$$

引理 3 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两 NQD 列,$\{a_n;n\geqslant 1\}$ 是正数列且 $a_n\uparrow\infty$.则 $P(|X_n|>a_n;\text{i.o.})=0$ 或 1 取决于 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n)$ 收敛或发散.

收稿日期:2009-03-05
作者简介:陈晓林(1985-),男,硕士研究生,主要从事概率极限理论和数理统计研究。
* 国家自然科学基金项目(10661006)资助。

证明 设 $A_n=\{|X_n|>a_n\}$. 由引理1知引理3显然成立.

引理4[6] 设 $\{f_n\}$ 是不减的正实数列，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nf_n}\begin{cases}<\infty,\\=\infty.\end{cases}$ 则存在一不减的实数列 $\{q_n\}(0<q_n\leqslant f_n)$ 使得 $\sup_{n\geqslant1}\frac{q_{2n}}{q_n}<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq_n}\begin{cases}<\infty,\\=\infty,\end{cases}$ 成立.

2 主要结果

设 $G(x)=P(|X_1|\geqslant x)$，定义 $B(x)=\inf\{y;G(y)\leqslant 1/x\},x>0$.

定理1 设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是同分布的两两NQD列，$\{a_n;n\geqslant1\}$ 是一正实数列，满足对任意 $\beta\in(0,2)$，$a_n/n^{1/\beta}\uparrow$ 且 $\sup_{n\geqslant1}\frac{a_{2n}}{a_n}<\infty$. (i) 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lg n)^2P(|X_1|>a_n)<\infty, \tag{2.1}$$

则有

$$\frac{S_n-c_n}{a_n}\to 0\ \text{a.s.}, \tag{2.2}$$

其中 $c_n=nEX_1(a_n)$，$X_i(a_i)=-a_iI_{(X_i<-a_i)}+X_iI_{(|X_i|\leqslant a_i)}+a_iI_{(X_i>a_i)}$. (ii) 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>a_n)=\infty, \tag{2.3}$$

则对于任意的实数列 $\{d_n;n\geqslant1\}$，有

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{S_n-d_n}{a_n}\right|=\infty\ \text{a.s.}. \tag{2.4}$$

定理2 设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是两两NQD列，(1.1)式在 $\alpha\in(0,2)$ 时成立. 若 $\{f_n\}$ 是不减的正实数列，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nf_n}\begin{cases}<\infty,\\=\infty,\end{cases} \tag{2.5}$$

等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>B(nf_n))\begin{cases}<\infty,\\=\infty.\end{cases} \tag{2.6}$$

定理3 在定理2的条件下，(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg n)^2P(|X_1|>B(nf_n))<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-c_n}{B(nf_n)}=0\ \text{a.s.}. \tag{2.7}$$

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>B(nf_n))=\infty$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n-c_n|}{B(nf_n)}=\infty\ \text{a.s.}, \tag{2.8}$$

其中，当 $0<\alpha<1$，$c_n=0$；当 $1\leqslant\alpha<2$，$c_n=nEX_1(a_n)$.

定理1的证明 (i) 由(2.1)式很容易得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^k(\lg 2^k)^2P(|X_1|>a_{2^k})<\infty, \tag{2.9}$$

进而得到

$$2^kP(|X_1|>a_{2^k})\leqslant 2^k(\lg 2^k)^2P(|X_1|>a_{2^k})\to 0,\ k\to\infty. \tag{2.10}$$

对任意的 n，总存在 k 使得 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$，当 n 充分大的时，则有 $a_n^{-1}|S_n-c_n|\leqslant a_{2^{k-1}}^{-1}\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|S_m-c_m|$. 因此，为了证明(2.2)式，只需证明

$$a_{2^{k-1}}^{-1}\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|S_m-c_m|\to 0\ \text{a.s.},k\to\infty. \tag{2.11}$$

设 $X_i(a_{2^k})=-a_{2^k}I_{(X_i<-a_{2^k})}+X_iI_{(|X_i|\leqslant a_{2^k})}+a_{2^k}I_{(X_i>a_{2^k})}$，$T_j=\sum_{i=1}^{j}X_i(a_{2^k})$. 那么

$\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|T_m-c_m|=\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|T_m-mEX_1(a_m)|\leqslant\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}(|T_m-mEX_1(a_{2^k})|+m|EX_1(a_{2^k})-EX_1(a_m)|)\leqslant\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|T_m-ET_m|+2^k\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|EX_1(a_{2^k})-EX_1(a_m)|$.

由 $\sup_{n\geqslant1}\frac{a_{2n}}{a_n}<\infty$ 和(2.10)式，有

$a_{2^{k-1}}^{-1}2^k\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|EX_1(a_{2^k})-EX_1(a_m)|=a_{2^{k-1}}^{-1}2^k\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|E(-a_{2^k}I_{(X_1<-a_{2^k})}+X_1I_{(|X_1|\leqslant a_{2^k})}+a_{2^k}I_{(X_1>a_{2^k})}+a_mI_{(X_1<-a_m)}-X_1I_{(|X_1|\leqslant a_m)}-a_mI_{(X_1>a_m)})|\ll a_{2^{k-1}}^{-1}2^ka_{2^k}P(|X_1|>a_{2^{k-1}})\leqslant\sup_{n>1}\frac{a_{2n}}{a_n}2^kP(|X_1|>a_{2^{k-1}})\to 0,k\to\infty$.

因此，对于任意的 $\varepsilon>0$，由(2.10)式，引理2和 Cr 不等式，有

$\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|S_m-c_m|\geqslant\varepsilon a_{2^{k-1}})\cdot\sum_{k=1}^{\infty}P(\bigcup_{i=1}^{2^k}\{|X_i|>a_{2^k}\}+\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|T_m-c_m|\geqslant\varepsilon a_{2^{k-1}})\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^kP(|X_1|>a_{2^k})+\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|T_m-ET_m|\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon a_{2^{k-1}})\ll\sum_{k=1}^{\infty}a_{2^{k-1}}^{-1}\cdot(\lg 2^k)^2\sum_{i=1}^{2^k}\mathrm{Var}X_i(a_{2^k})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_{2^{k-1}}^{-2}(\lg 2^k)^2 2^kEX_1^2(a_{2^k})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_{2^{k-1}}^{-2}(\lg 2^k)^2 2^kE(-a_{2^k}I_{(X_1<-a_{2^k})}+X_1I_{(|X_1|\leqslant a_{2^k})}+a_{2^k}I_{(X_1>a_{2^k})})^2\ll\sum_{k=1}^{\infty}a_{2^{k-1}}^{-2}(\lg 2^k)^2 2^k(EX_1^2I_{(|X_1|\leqslant a_{2^k})}+a_{2^k}^2P(|X_1|>a_{2^k})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_{2^{k-1}}^{-2}(\lg 2^k)^2 2^k\cdot\sum_{j=1}^{k}(EX_1^2I_{(a_{2^{j-1}}<|X_1|<a_{2^j})}+(\sup_{n\geqslant1}\frac{a_{2n}}{a_n})^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}2^k(\lg 2^k)^2P(|X_1|>a_{2^k})\ll\sum_{j=1}^{\infty}a_{2^j}^2P(a_{2^{j-1}}<|X_1|\leqslant$

$a_{2^j})\sum_{k=j}^{\infty}\frac{2^k(\lg 2^k)^2}{a_{2^{k-1}}^2}.$ (2.12)

由于 $0<\beta<2$,且 $\frac{a_n}{n^{1/\beta}}\uparrow\infty$,有

$$\sum_{k=j}^{\infty}\frac{2^k(\lg 2^k)^2}{a_{2^{k-1}}^2}=\sum_{k=j}^{\infty}\left(\frac{2^{(k-1)/\beta}}{a_{2^{k-1}}}\right)^2\frac{(\lg 2^k)^2}{2^{(2/\beta-1)k}2^{-2/\beta}}\leqslant$$

$$\frac{2^{2j/\beta}}{a_{2^{j-1}}^2}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{(\lg 2^k)^2}{2^{(2/\beta-1)k}}\ll\frac{2^{2j/\beta}}{a_{2^{j-1}}^2}\frac{(\lg 2^j)^2}{2^{(2/\beta-1)j}}=\frac{2^j}{a_{2^{j-1}}^2}(\lg 2^j)^2.$$

代入到(2.12)式,结合(2.9)式,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\max_{2^{k-1}\leqslant m<2^k}|S_m-c_m|\geqslant$$

$$\varepsilon a_{2^{k-1}})\ll(\sup_{n\geqslant 1}\frac{a_{2n}}{a_n})^2\sum_{j=1}^{\infty}(\lg 2^j)^2 2^j P(a_{2^{j-1}}<|X_1|\leqslant$$

$a_{2^j})<\infty.$

因此,由引理3可得到(2.11)式成立,从而(2.2)式成立.

(ii) 反证.假如存在一个实数列$\{d_n;n\geqslant 1\}$使得(2.4)式不成立,则由引理3可知,一定存在一常数$d_0\in[0,+\infty)$,使得$\limsup_{n\to\infty}|\frac{S_n-d_n}{a_n}|=d_0$ a.s.,从而$\limsup_{n\to\infty}|\frac{X_n-(d_n-d_{n-1})}{a_n}|\leqslant\limsup_{n\to\infty}|\frac{S_n-d_n}{a_n}|+\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}|\frac{S_{n-1}-d_{n-1}}{a_{n-1}}|\leqslant 2d_0$ a.s.. 另外由$a_n/n^{1/\beta}\uparrow$可得$a_n\uparrow$,进而得知$\frac{X_n}{a_n}\xrightarrow{P}0$,结合前式得$\limsup_{n\to\infty}|\frac{d_n-d_{n-1}}{a_n}|<\infty$. 故$\limsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{a_n}\triangleq M\leqslant 2d_0+\limsup_{n\to\infty}\frac{|d_n-d_{n-1}|}{a_n}<\infty$ a.s.. 由此可得$P(|X_1|>(M+1)a_n;\text{i.o.})=0$. 利用引理3则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>(M+1)a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>$$

$(M+1)a_n)<\infty.$ (2.13)

但是,由文献[7]的引理3.2.4得知,(2.3)式和$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>Ma_n)=\infty$,对于任意$M>0$是的等价的.这与(2.13)式矛盾,从而(2.4)式成立.

定理2的证明 由(1.1)式得知,$G(x)$是指数为α的正规变化函数,因此由文献[8]可知,$B(x)$是指数为$\frac{1}{\alpha}$的正规变化函数,从而

$$B(x)=x^{1/\alpha}c(x)\exp\{\int_1^x\frac{b_1(u)}{u}du\}\triangleq x^{1/\alpha}l_1(x),\tag{2.14}$$

其中$l_1(x)$是慢变化函数,$\lim_{x\to\infty}c(x)=c\in(0,\infty)$,$\lim_{x\to\infty}b_1(x)=0$.由正则变化函数的性质[4]得到

$$G(B(x))\sim x^{-1},x\to\infty.\tag{2.15}$$

结合(1.1)式和(2.15)式,则有$P(|X_1|>B(nf_n))=G(B(nf_n))\sim\frac{1}{nf_n}$.故(2.5)式等价(2.6)式.

定理3的证明 设$l_2(x)=c\exp\{\int_1^x\frac{b_1(u)}{u}du\}$,$b(x)=x^{1/\alpha}l_2(x)$,结合(2.14)式,很容易得到$B(x)\sim b(x),x\to\infty$.因此,定理3中$B(nf_n)$可以用$b(nf_n)$来替代.对于任意给定的$r\in(\alpha,2)$,一定存在$x_r>0$,使得$b(x)/x^{r/1}$在$(x_r,\infty)$上递增.由引理4,不失一般性可设$\sup_{n\geqslant 1}\frac{f_{2n}}{f_n}<\infty$.再设$a_n=b(nf_n)$,则$\frac{a_n}{n^{1/r}}=\frac{b(nf_n)}{n^{1/r}}=\frac{b(nf_n)}{(nf_n)^{1/r}}f_n^{1/r}\uparrow$,且

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{a_{2n}}{a_n}=\sup_{n\geqslant 1}\frac{b(2nf_{2n})}{b(nf_n)}=$$

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{(2nf_{2n})^{1/r}l_1(2nf_{2n})}{(nf_n)^{1/r}l_1(nf_n)}\ll\sup_{n\geqslant 1}(\frac{f_{2n}}{f_n})^{1/r}\frac{l_1(2nf_{2n})}{l_1(nf_n)}<\infty.$$

从而实数列$\{a_n=b(nf_n)\}$满足定理1的条件.

(i) 设$\sum_{n=1}^{\infty}(\lg n)^2P(|X_1|>a_n)<\infty$,由定理1得

$$\frac{S_n-c_n}{a_n}\to 0\text{ a.s.},\tag{2.16}$$

其中$c_n=nEX_1(a_n)$,$X_i(a_i)=-a_iI_{(X_i<-a_i)}+X_iI_{(|X_i|\leqslant a_i)}+a_iI_{(X_i>a_i)}$.

再证明当$0<\alpha<1$,$\frac{c_n}{a_n}\to 0$.由上述证明可知$\frac{a_n}{n}\to\infty$,且由慢变化函数的性质得$\frac{a_n}{n}$是拟单调递增的,不失一般性可设$\frac{a_n}{n}\uparrow\infty$,因此

$$\frac{|c_n|}{a_n}=\frac{|nEX_1(a_n)|}{a_n}=$$

$$\frac{n|E(-a_nI_{(X_1<-a_n)}+X_1I_{(|X_1|\leqslant a_n)}+a_nI_{(X_1>a_n)})|}{a_n}\leqslant$$

$$nP(|X_1|>a_n)+\frac{n}{a_n}E|X_1|I_{(|X_1|\leqslant a_n)}=nP(|X_1|>$$

$$a_n)+\frac{n}{a_n}\sum_{i=1}^{n}E|X_1|I_{(a_{i-1}<|X_1|\leqslant a_i)}=nP(|X_1|>$$

$$a_n)+\frac{n}{a_n}\sum_{i=1}^{n}a_iP(a_{i-1}<|X_1|\leqslant a_i).\tag{2.17}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}(\lg n)^2P(|X_1|\leqslant a_n)<\infty$可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>a_n)\ll\sum_{n=1}^{\infty}(\lg n)^2P(|X_1|>a_n)<$$

$\infty,$ (2.18)

进而可得$\sum_{n=1}^{\infty}nP(a_{n-1}<|X_1|\leqslant a_n)<\infty$.由(2.18)式和$P(|X_1|>a_n)\downarrow$可得

$$nP(|X_1|>a_n)\to 0.\tag{2.19}$$

又因为$\frac{a_n}{n}\uparrow\infty$,由Kronecker引理得,

$$\frac{n}{a_n}\sum_{i=1}^{n}a_iP(a_{i-1}<|X_1|\leqslant a_i)\to 0. \qquad (2.20)$$

由(2.16)式、(2.17)式、(2.19)式和(2.20)式可得 $\frac{S_n}{a_n}\to 0$ a.s..

(ii) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|>a_n)=\infty$，则由定理1得 $\limsup_{n\to\infty}|\frac{S_n-d_n}{a_n}|=\infty$ a.s..

即(2.8)式成立.

参考文献：

[1] Lehmann, E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 37: 1137-1153.

[2] 吴群英. 两两NQD列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.

[3] 王岳宝, 苏淳, 刘许国. 关于两两NQD列的若干极限性质[J]. 应用数学学报, 1998, 213: 404-414.

[4] Seneta E. Regularly varying functions[C]. Berlin: Springer, Lecture Notes in Mathematics 508, 1976.

[5] Matula P A. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett, 1992, 15: 209-213.

[6] Chen P Y, Qi Y C. Chover's law of the iterated logarithm for weighted sums with application [J]. Sankyh¯a: The Indian Journal of Statistics, 2006, 68(1), 45-60.

[7] Stout W F. Almost sure convergence[M]. New York: Academic Press, 1974.

[8] De Haan L. On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes[M]. Amsterdam: Mathematics Centrum, 1970.

(责任编辑：尹　闯)

(上接第255页 Continue from page 255)

$t>t_4\}$，则 $S(\bar{t})=m_3$，且当 $t_4\leqslant t<\bar{t}$ 时，有 $S'(t)\geqslant(1-\alpha M)S(t)$. 在 $[t^*,\bar{t})$ 上积分，得 $S(t)\geqslant S(t^*)e^{(1-\alpha M)(t-t^*)}\geqslant m^*e^{(1-\alpha M)(N_2+1)\tau}\triangleq m_1$. 因为 $S(\bar{t})\geqslant m_3$，所以当 $t>\bar{t}$ 时，上述过程可重复.

综上所述，当 t 充分大时，$S(t)\geqslant m_1$. 取 $m=\min\{m_1,m_2\}$，则当 t 充分大时，有 $m\leqslant S(t)\leqslant M$，$m\leqslant I(t)\leqslant M$. 所以模型(1)是一致持久的.

3 生物意义

本文得到脉冲控制害虫的最大脉冲周期 $\tau_{\max}=\frac{au}{c}$ 及最小的病虫释放量 $u_{\min}=\frac{c\tau}{a}$. 当 $\tau<\tau_{\max}$ 或 $u>u_{\min}$ 时，系统的害虫灭绝周期解全局渐近稳定；当 $\tau>\tau_{\max}$ 或 $u<u_{\min}$ 时，系统一致持久. 在害虫防治工作中，我们可以根据实际情况选择适当的病虫释放量 u 及释放周期 τ 来达到控制害虫的目的.

参考文献：

[1] 吕鸿声. 昆虫病毒与昆虫病毒病[M]. 北京：科学出版社, 1982.

[2] 洪华珠, 杨红. 杀虫微生物学纲要[M]. 武汉：华中师范大学出版社, 1997.

[3] Falcon L A. Use of bacteria for microbial control of insects[M]. New York: Academic press, 1971.

[4] Burges H D, Hussey N W. Microbial control of insects and mites[M]. New York: Academic Press, 1971: 67-95.

[5] Falcon L A. Problems associated with the use of arthropod viruses in pest control[J]. Annu Rev Entomol, 1976, 21: 305-324.

[6] 徐伟松, 钟国华, 胡美英. 昆虫病毒在害虫防治上的应用及其对寄生蜂的影响[J]. 昆虫天敌, 2001, 23(2): 70-79.

[7] Goh B S. Management and analysis of biological populations [M]. Amsterdam, Oxford, NY: Elaevier Scientific Publishing Company, 1980.

[8] Zhang Hong, Xu Weijian, Chen Lansun. A impulsive infective transmission SI model for pest control[J]. Math Meth Appl Sci, 2007, 30: 1170-1172.

[9] Lakshimikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of an impulsive differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[10] Bainov D, Simeonov P. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. New York: 66 Longman Scientific Technical, 1993.

(责任编辑：尹　闯)