分糖函数 $g(4m,5)$ 初探*

Initially Probing into Candy Sharing Function $g(4m,5)$

梁文忠[1],陈 红[1],许成章[1],罗海鹏[2]

LIANG Wen-zhong[1],CHEN Hong[1],XU Cheng-zhang[1],LUO Hai-peng[2]

(1. 梧州学院,广西梧州 543002;2. 广西科学院,广西南宁 530007)

(1. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要:研究由分糖游戏引出的一道组合数学难题——分糖函数 $g(4m,5)$ 的定量计算. 给出该函数一种新的计算方法,并通过计算机得出 $4 \leqslant 4m \leqslant 80$ 时分糖函数的准确值及所有相应的优秀向量.

关键词:组合数学 分糖函数 优秀向量 算法

中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2009)03-0230-04

Abstract: A difficult problem of combinatorics caused by candy sharing game—— quantitative calculation of candy sharing function $g(4m,5)$ is studied, a new arithmetic is given, and precise values of the candy sharing function $g(4m,5)$ in $4 \leqslant 4m \leqslant 80$ and all of the corresponding excellent vectors are obtained by computer.

Key words: combinatorics, candy sharing function, excellent vector, arithmetic

著名数学家 F. Harary[1]说过“在组合数学中有许多问题其结果往往易于陈述但难以证明”. 近年来引起美国教育界和学术界共同关注的分糖游戏[2~4]中就蕴含这样的新问题. Peter Trapa[2,3]在 2007 年所开设两次专题讲座中,都讲述了与分糖游戏有关的问题,并说这是离散动力系统的一个例子.

在分糖游戏开始时各人的糖数是随机的,结束时各人糖数之比却是固定的,类似于两个函数的卷积具有的“磨光”作用;此外,分糖游戏结束时各人的糖数之和大于开始时投入的糖数,形成有利的“投入产出比”. 因此,分糖游戏是一种具有潜在应用价值的数学模型.

通常的分糖游戏可描述如下. 给定 2 个 $k(k \geqslant 3)$ 维向量

$$\begin{cases} \Gamma = (\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \cdots, \frac{q_k}{p_k}), \\ \alpha_0 = (p_1a_1, p_2a_2, \cdots, p_ka_k), \end{cases}$$

其中 $\frac{q_i}{p_i}$ 是既约真分数并且 $1 \leqslant q_i \leqslant p_i, a_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant k$. 称 Γ 为游戏规则向量,α_0 为初始向量. 教师让 k 个学生围坐一圈并按顺(或逆)时针的方向依次编号,编号为 i 的学生获得 α_0 的第 i 个分量的糖数. 然后按如下方法进行调整:教师一声哨响,k 个学生同时把自己糖数的 $\frac{q_1}{p_1}$ 分给右边的学生(第 k 个学生把自己糖数的 $\frac{q_k}{p_k}$ 分给第 1 个学生);如果第 i 个学生的糖数变成不是 p_i 的倍数,教师就给该学生补给 $r_i(0 \leqslant r_i \leqslant p_i - 1)$ 块糖,使他的糖数恰好成为 p_i 的倍数. 这样的调整称为 Γ 变换. 用向量 α_i 与 α_{i+1} 记录某次 Γ 变换前与变换后各人得糖数的状态,记 $\alpha_{i+1} = \Gamma(\alpha_i)$. 记所有这样的向量的集合为 Π,在 Π 中引进一个序“$\prec$”:当且仅当 $i < j$ 时 $\alpha_i \prec \alpha_j$,并说 α_i 前于 α_j,或者 α_j 后于 α_i;特别地,称向量 α_{i+1} 为 α_i 的后继,记为 $\alpha_i \prec \alpha_{i+1}$ 即 $\alpha_{i+1} = \Gamma(\alpha_i)$.

易知 $\prec$ 是 Π 的一个全序,从而 $(\Pi, \prec)$ 是一个全序集. 分糖游戏可以不断地进行下去,因此全序集 $(\Pi, \prec)$ 可以视为无限集. 如果存在整数 $M \geqslant 1$ 使得当 $i \geqslant M$ 时恒有 $\Gamma(\alpha_i) = \alpha_i$,则在游戏过程中教师不必再补充任何糖果,即这个分糖游戏所需要的糖数是有界的,简称这个分糖游戏是有界的,或者说变换 Γ 是稳定的. 适合关系式 $\Gamma(\alpha) = \alpha$ 的向量 α 称为不动点,当不动点出现时,该游戏视同结束,即 $(\Pi, \prec)$ 是有限集,其中最后一个元素就是不动点. 由初始向量 α_0 生成的不动点记为 $\alpha|\alpha_0$.

文献[2 ～ 4]从定性研究的角度研究了分糖游

收稿日期:2008-07-20

作者简介:梁文忠(1963-),男,高级讲师,主要从事计算理论、离散数学研究。

*国家自然科学基金项目(60563008),广西自然科学基金项目(0991278),梧州学院科研项目资助。

戏的稳定性，但是忽略了有关定量研究的更多更精彩内容.

记向量 α 各分量之和为 $g(\alpha)$. 如果分糖游戏是稳定的，它的不动点是唯一的，那么 $g(\alpha|\alpha_0)$ 就明确地定义为 α_0 的函数，这就蕴含着问题：设 $(\Pi, \prec)$ 是有限集，给定正整数 m，怎样设计初始向量 α_0，才能够使 $g(\alpha_0) \leqslant m$，并且使 $g(\alpha|\alpha_0)$ 达到最大值；记这个最大值为 $g(m,\Gamma)$，称实现这个最大值的初始向量为优秀向量，试求所有优秀向量. 这是组合数学中非常有趣的新问题，学术界尚未见到有关的研究报道. 鉴于在一般情况下研究函数 $g(m,\Gamma)$ 非常困难，本文研究分糖函数的一个特例，给出一个计算方法，初步探索得到了一些新结论.

1 分糖游戏的特例及其性质

对于任意整数 $s < t$，简记 $t-s+1$ 元的整数集合 $\{s,s+1,s+2,\cdots,t\}$ 为 $[s,t]$. 约定，以下说到的所有向量都是 5 维向量，并且只考虑分糖游戏的特例：

定义 1 给定 5 维向量 Γ_4 与初始向量 α_0，

$$\begin{cases}\Gamma_4 = (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}),\\ \alpha_0 = (4a_1,4a_2,4a_3,4a_4,4a_5),\end{cases}$$

其中 $a_i \geqslant 0, i \in [1,5]$. 由初始向量 α_0 经过无限次 Γ_4 变换生成的向量的全序集也记为 $(\Pi, \prec)$.

根据游戏规则，在每次 Γ_4 变换中，编号为 i 的学生得到编号为 $i-1$ 的学生糖数的 1/4，加上自己糖数的 3/4，可能还要加上教师补给的 0～3 块糖，这样他得到的糖数恰好是 4 的倍数，故有

引理 1 i) $\forall\, \alpha \in (\Pi, \prec)$，向量 α 的各分量都是 4 的倍数. ii) 设 $\beta = \Gamma(\alpha)$，令

$$\alpha = (4a_1,4a_2,4a_3,4a_4,4a_5),\ \beta = (4b_1,4b_2,4b_3,4b_4,4b_5), \tag{1}$$

置 $a_0 = a_5$，则有 $b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}]$，其中 $i \in [1,5]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

约定 $\beta = \Gamma(\alpha)$，其中 α 与 β 如(1)式所示，并且在引用 $b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}]$ 时总是置 $a_0 = a_5$. 记向量 ξ 的各分量的最小值为 N_ξ，最大值为 M_ξ；ξ 的各分量取最小值的项称为弱项，弱项的个数称为弱项数并记为 σ_ξ. 根据引理 1 易知

引理 2 α 是不动点 $\Leftrightarrow \alpha = (4a,4a,4a,4a,4a)$.

引理 3 $M_\beta \leqslant M_\alpha$.

证明 设 $M_\alpha = 4b$，根据引理 1 有 $b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}] \leqslant [\frac{b+3b+3}{4}] = b \Rightarrow M_\beta \leqslant M_\alpha, i \in [1,5]$.

引理 4 设 α 是非不动点，则下述两个结论恰有一个成立：1) $N_\beta > N_\alpha$. 2) $\sigma_\beta < \sigma_\alpha$.

证明 设 $N_\alpha = 4a, M_\alpha = 4b$，如果 α 的弱项都是孤立的，即 a_i 是弱项而 a_{i-1} 与 a_{i+1} 不是弱项，则有 $a_i = a, a_{i-1} > a$ 与 $a_{i+1} > a$，根据引理 1 有 $b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}] \geqslant [\frac{a+1+3a+3}{4}] = a+1 > a$，$b_{i-1} = [\frac{a_{i-2}+3a_{i-1}+3}{4}] \geqslant [\frac{a+3(a+1)+3}{4}] = a+1 > a, b_{i+1} = [\frac{a_i+3a_{i+1}+3}{4}] \geqslant [\frac{a+3(a+1)+3}{4}] = a+1 > a$. 综合上式得 $N_\beta > N_\alpha$，即得 1) 成立.

如果 α 的弱项不都是孤立的，由于 α 是非不动点，所以存在 a_i 与 a_{i-1} 是弱项而 a_{i+1} 不是弱项，那么有 $a_{i+1} > a_i = a_{i-1} = a$，于是 $b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}] \geqslant [\frac{a+3a+3}{4}] = a, b_{i+1} = [\frac{a_i+3a_{i+1}+3}{4}] \geqslant [\frac{a+3(a+1)+3}{4}] = a+1 > a. b_{i-1} = [\frac{a_{i-2}+3a_{i-1}+3}{4}] \geqslant [\frac{a+3a+3}{4}] = a$.

由此即得 2) 成立.

定理 1 由定义 1 给出的分糖游戏是有界的.

证明 由引理 1 可知向量 α 与 β 的各分量都是 4 的倍数，由此易知分糖游戏可以不断进行下去；由引理 3 可知，在全序集 $(\Pi, \prec)$ 中各后继向量的各分量的最大值不会增加；由引理 4 可知，后继向量的最小值严格增加或者弱项数严格减小，因此在经过有限次 Γ 变换后，必将导致某向量的各分量都相等；由引理 2 可知，各分量都相等的向量是不动点. 综上所述，出现不动点的分糖游戏是有界的. 这就证明了定理 1 的结论.

2 分糖函数 $g(4m,5)$ 的计算方法

从定量研究的角度看来，$g(\alpha|\alpha_0)$ 是初始向量 α_0 的函数. 定理 1 表明 $(\Pi, \prec)$ 是有限集，并且函数 $g(\alpha|\alpha_0)$ 是明确定义的，因此这函数存在最大值.

定义 2 给定整数 $4m \geqslant 4$，如果满足条件 $g(\alpha_0) = 4m$ 的初始向量 α_0 使 $g(\alpha|\alpha_0)$ 达到最大值，那么就称这初始向量为优秀的，并记函数 $g(\alpha|\alpha_0)$ 的最大值为 $g(4m,5)$.

为了计算函数 $g(4m,5)$ 的准确值，首先考虑其性质. 由引理 1 可知在游戏过程中出现的每个向量(包括不动点)的各分量都是 4 的倍数，故有 $g(\alpha|\alpha_0) = 5 \times 4a$，即得

引理 5 对于任意初始向量 α_0，都有 $g(\alpha|\alpha_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 20)$.

根据定义 2,显然有计算函数 $g(4m,5)$ 下界的一个方法.

引理 6 对于任意一个初始向量 α_0,都有 $g(\alpha_0) = 4m \Rightarrow g(\alpha|\alpha_0) \leqslant g(4m,5)$.

引理 7 设两个初始向量 α_0 与 α_0^* 形如 $\alpha_0 = (4a_1,4a_2,4a_3,4a_4,4a_5)$,$\alpha_0^* = (4a_1^*,4a_2^*,4a_3^*,4a_4^*,4a_5^*)$,它们生成的不动点分别是 $\alpha|\alpha_0$ 与 $\alpha^*|\alpha_0^*$,则有 $a_i \leqslant a_i^*, i \in [1,5] \Rightarrow g(\alpha|\alpha_0) \leqslant g(\alpha^*|\alpha_0^*)$.

证明 根据定义 1,由初始向量 α_0 经过若干次 Γ_4 变换生成的集合记为 $(\Pi,\prec)$,由初始向量 α_0^* 经过若干次 Γ_4 变换生成的集合记为 $(\Pi^*,\prec)^*$,并且 $\alpha \prec \beta \in (\Pi,\prec)$,$\alpha^* \prec \beta^* \in (\Pi^*,\prec)^*$,$\beta = (4b_1,4b_2,4b_3,4b_4,4b_5)$,$\beta^* = (4b_1^*,4b_2^*,4b_3^*,4b_4^*,4b_5^*)$,则由引理 1 有 $a_i \leqslant a_i^* \Rightarrow b_i = [\frac{a_{i-1}+3a_i+3}{4}] \leqslant [\frac{a_{i-1}^*+3a_i^*+3}{4}] = b_i^*$,其中 $i \in [1,5]$. 反复进行 Γ_4 变换,直到生成不动点,上式仍然成立,故有引理 7 的结论成立.

引理 8 函数 $g(4m,5)$ 是单调增加的,即 $1 \leqslant m_1 < m_2 \Rightarrow g(4m_1,5) \leqslant g(4m_2,5)$.

证明 对于给定的整数 $4 \leqslant 4m_1 < 4m_2$,设 α_0 与 α_0^* 如引理 7 所示,α_0 是实现函数 $g(4m_1,5)$ 的一个优秀向量,它满足条件 $g(\alpha_0) = 4m_1$ 且与另一个初始向量 α_0^* 有关系式:$a_1^* = a_1 + m_2 - m_1 > a_1$,$a_i^* = a_i$,$i \in [2,5]$.

显然有 $a_i \leqslant a_i^*$,$i \in [1,5]$,由引理 7 即得 $g(\alpha^*|\alpha_0^*) \geqslant g(\alpha|\alpha_0) = g(4m_1,5)$;另一方面,由引理 6 有 $g(\alpha^*|\alpha_0^*) \leqslant g(4m_2,5)$,故引理 8 的结论成立.

注意到,任意初始向量都可以表示为 $\alpha_0 = 4\xi$,其中 ξ 是不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = m$(m 是给定的整数)的一个非负整数解向量,由定义 2 即得

定理 2 对于任意给定的整数 $m \geqslant 1$,记不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = m$ 的非负整数解的解空间为 $\Omega(m)$,则有 $g(4m,5) = \max\{n|n = g(\alpha|4\xi), \xi \in \Omega(m)\}$.

虽然,根据定理 2 用穷举法可以计算函数 $g(4m,5)$ 的准确值,但当 m 值较大时,在 $\Omega(m)$ 中有太多解向量,必然要耗费太多的运算量. 显然,提高运算效率的正确途径是缩小解空间 $\Omega(m)$ 的待考察范围.

引理 9 设 $\beta = \Gamma(\alpha)$,其中 α 与 β 如(1)式所示,则有 i)$g(\beta) \geqslant g(\alpha)$;ii)$g(\beta) = g(\alpha) \Leftrightarrow a_i \equiv r(\mathrm{mod}4)$,其中 $r \in [0,3]$,$i \in [1,5]$.

证明 在形如(1)式的 α 中设 $a_i = 4c_i + r_i$,其中 $r_i \in [0,3]$,$i \in [1,5]$. 注意到 $g(\alpha) = 4\sum_{i=1}^{5} a_i = 4\sum_{i=1}^{5} 4c_i + 4\sum_{i=1}^{5} r_i$,$r_0 = r_5$,$c_0 = c_5$,根据引理 1 有 $b_i = [\frac{4c_{i-1}+r_{i-1}+12c_i+3r_i+3}{4}] = c_{i-1}+3c_i+[\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4}]$,

$$g(\beta) = 4\sum_{i=1}^{5} b_i = 4\sum_{i=1}^{5}(c_{i-1}+3c_i) + 4\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4}] = 4\sum_{i=1}^{5} 4c_i + 4\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4}] = 4\sum_{i=1}^{5}(a_i - r_i) + 4\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4}] = g(\alpha) + 4\sum_{i=1}^{5}([\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4}] - r_i) = g(\alpha) + 4\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}+3r_i+3}{4} - r_i] = g(\alpha) + 4\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}-r_i+3}{4}]. \tag{2}$$

注意到 $0 \leqslant r_{i-1} - r_i + 3 \leqslant 6$,故后一个求和式是非负数,这就得到 i). 为了证明 ii),只须证明

$$\sum_{i=1}^{5}[\frac{r_{i-1}-r_i+3}{4}] = 0 \Leftrightarrow r_i \equiv r \Leftrightarrow a_i \equiv r(\mathrm{mod}4),\ r \in [0,3], i \in [1,5]. \tag{3}$$

(3)式为零等价于 $0 \leqslant r_{i-1} - r_i + 3 \leqslant 3 (i \in [1,5])$,即得 $0 \leqslant r_{i-1} \leqslant r_i (i \in [1,5])$,依次递推得 $r_5 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$. 显然,只能全部取等号,故有 $r_i = r (r \in [0,3], i \in [1,5])$. 这就证明了(3)式. 由(2)式与(3)式即得引理 9 成立.

定理 3 对于任意给定的整数 $m \geqslant 1$,记方程
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = m, \\ \exists\, i,j, x_i \neq x_j(\mathrm{mod}4),\text{其中 } i \neq j \end{cases}$$
的非负整数解的解空间为 $\Omega^*(m)$,则有 $g(4m,5) = \max\{n|n = g(\alpha|4\xi), \xi \in \Omega^*(m)\}$.

证明 设 $\alpha_0 = 4\xi$ 是实现 $g(4m,5)$ 的任意一个优秀向量,其中 $\xi \in \Omega(m)$. 分两种情形:(i)$\xi \in \Omega^*(m)$,则 $\alpha_0 = 4\xi$ 也是实现 $g(4m,5)$ 的优秀向量. (ii)$\xi \notin \Omega^*(m)$,即 $\forall\, i,j \in [1,5]$ 有 $x_i \equiv x_j(\mathrm{mod}4)$. 于是 α_0 的各分量 $4a_i$ 满足 $a_i \equiv r(\mathrm{mod}4)$,$r \in [0,3]$,$i \in [1,5]$. 由引理 9 有 $g(\beta) = g(\alpha)$,这里 β 是 α 的后继. 由此可知,在初始向量 α_0 生成的全序集 $(\Pi,\prec)$ 中,存在 $t \geqslant 1$ 使 $g(\alpha_t) = g(\alpha_0)$,并且 α_t 的各分量 $4a_i$ 满足:$\exists\, i,j \in [1,5] \Rightarrow a_i \neq a_j(\mathrm{mod}4)$,这里 $i \neq j$.

令 $\alpha_0^* = \alpha_t = 4\xi^*$,则有 $\xi^* \in \Omega^*(m)$. 考察以 $\alpha_0^* = \alpha_t$ 为初始向量的分糖游戏,易知 $\alpha|\alpha_0^* = \alpha|\alpha_0$,即两个初始向量 α_0^* 与 α_0 生成相同的不动点,都是实现 $g(4m,5)$ 的优秀向量.

综上所述,$\forall\, \xi \in \Omega(m)$,如果 $\alpha_0 = 4\xi$ 是实现

$g(4m,5)$ 的优秀向量，那么总可以找到相应的 $\xi^* \in \Omega^*(m)$ 使 $\alpha_0^* = 4\xi^*$ 也是实现 $g(4m,5)$ 的优秀向量，故有 $\max\{n|n = g(\alpha|4\xi), \xi \in \Omega(m)\} = \max\{n|n = g(\alpha|4\xi^*), \xi^* \in \Omega^*(m)\}$. 再由定理 2 即得定理 3.

算法 1　计算函数 $g(4m,5)$ 的准确值及其优秀向量的算法

1°. 给定整数 $m \geqslant 1$，把不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = m$ 的非负整数解按字典排列法排列，令 $r = |\Omega^*(m)|, j = 1, n = 0$.

2°. 设 $\xi_j \in \Omega^*(m)$，令 $\alpha_0 = 4\xi_j = 4(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), i = 0$.

3°. 根据引理 1 计算 $\alpha_{i+1} = \Gamma(\alpha_i)$，其中 $\alpha = \alpha_i = (4a_1, 4a_2, 4a_3, 4a_4, 4a_5), \beta = \alpha_{i+1} = (4b_1, 4b_2, 4b_3, 4b_4, 4b_5)$.

4°. 如果 $N_\beta < M_\beta$，令 $i = i + 1$，转到 3°.

5°. 计算 $g(\beta)$，如果 $g(\beta) > n$，令 $n = g(\beta), h = 0$.

6°. 如果 $g(\beta) = n$，令 $h = h + 1$，打印向量 $\alpha_0 = 4\xi_j$.

7°. 令 $j = j + 1$，如果 $j < r$，转到 2°.

8°. 令 $g(4m,5) = n$，运算结束.

注意到 $\Omega^*(m) \subset \Omega(m)$，因此基于定理 3 的算法 1 肯定比基于定理 2 的穷举法更有效率. 在算法 1 中，由 5° ～ 6° 获得 n 当前的极大值. 若 $g(\beta) > n$，则当前极大值改变为 $n = g(\beta)$，并且令 $h = 0$，从而清除以前记录过的极大值，重新计算当前极大值的个数. 在完成 1° ～ 7° 的运算并考察了 $\Omega^*(m)$ 的所有向量后，由定理 2 就得到准确值 $g(4m,5) = n$，并且在 6° 中最后打印出来的是 h 个优秀向量.

对于任意自然数 $i \geqslant 0$，两个向量 $\alpha = (4a_1, 4a_2, 4a_3, 4a_4, 4a_5)$ 与 $\beta = (4a_{i+1}, 4a_{i+2}, 4a_{i+3}, 4a_{i+4}, 4a_{i+5})$ 称为等价的，其中 β 的各分量的下标都取模 5 同余并且归结到[1,5]. 约定，多个等价的优秀向量视为相同的一个. 例如优秀向量(12,0,0,0,4) 与(4,12,0,0,0)、(0,4,12,0,0)、(0,0,4,12,0) 等都是同一个优秀向量.

例 1　令 $m = 4$，则 $\Omega^*(m)$ 中的各向量分别是(0,0,0,0,4)，(0,0,0,1,3)，(0,0,0,2,2)，…，(4,0,0,0,0).

由算法 1，得到 4 个优秀向量(12,0,0,0,4)，(12,0,0,4,0)，(12,0,4,0,0)，(12,4,0,0,0)，以这些向量为初始向量的分糖游戏都能生成不动点 $\beta = (12,12,12,12,12)$，这就得到 $g(16,5) = 60$.

应用计算机完成例 1 运算的时间不到 1s. 随着 m 值的增加，$\Omega^*(m)$ 中所含的向量个数呈指数型的增长，因此寻找优秀向量与确定函数 $g(4m,5)$ 就成为组合数学中非常困难的问题.

3　关于分糖函数 $g(4m,5)$ 的若干结果

根据算法 1，我们计算得到如表 1 所示的一些结果，其中优秀向量的个数为 h，当 $h \leqslant 3$ 时最后一列写出了所有优秀向量. 当 $h > 3$ 时最后一列仅写出其中的 3 个优秀向量.

表 1　当 $4 \leqslant 4m \leqslant 80$ 时函数 $g(4m,5)$ 的准确值及其优秀向量

Table 1　Results and excellent vectors of $g(4m,5)$ when $4 \leqslant 4m \leqslant 80$

$4m$	n	h	实现 $g(4m,5)=n$ 的优秀向量 Excellent vectors when $g(4m,5)=n$
4	20	1	(4,0,0,0,0)
8	40	1	(8,0,0,0,0)
12	60	1	(12,0,0,0,0)
16	60	4	(12,0,0,0,4),(12,0,0,4,0),(12,0,4,0,0)
20	80	1	(16,0,0,0,4)
24	80	7	(16, 0,0,0,8),(16,0,0,4,4),(16,0,4,0,4)
28	100	1	(20,0,0,0,8)
32	100	6	(20,0,0,0,12),(20,0,0,4,8),(20,0,4,0,8)
36	120	1	(24,0,0,0,12)
40	120	6	(24,0,0,0,16),(24,0,0,4,12),(24,0,4,0,12)
44	120	24	(24,0,0,0,20),(24,0,0,4,16),(24,0,0,8,12)
48	140	2	(28,0,0,4,16),(55,4,0,0,0)
52	140	16	(28,0,0,4,20),(28,0,0,8,16),(28,0,4,0,20)
56	140	58	(28,0,0,0,28),(28,0,0,4,24),(28,0,0,8,20)
60	160	5	(32,0,0,8,20),(48,8,0,0,4),(52,0,0,0,8)
64	160	28	(32,0,0,8,24),(32,0,0,12,20),(32,0,4,8,20)
68	160	96	(32,0,0,8,28),(32,0,0,12,24),(32,0,0,16,20)
72	180	9	(36,0,0,12,24),(52,12,0,0,8),(56,4,0,0,12)
76	180	48	(36,0,0,12,28),(36,0,0,16,24),(36,0,4,12,24)
80	200	1	(68,0,0,0,12)

表 1 中的结论是首次报道的. 我们应用 CPU 为 AMD3500＋的计算机完成上述计算的时间约为 10h.

参考文献：

[1]　李乔. 拉姆塞理论[M]. 长沙：湖南教育出版社，1990.

[2]　Peter Trapa. Share the wealth[C/OL]. Utah Teachers' Math Circle, spring semester 2007, 1/31/00. [2008-02-15]. http://www.math.utah.edu/mathcircle/fall02.html

[3]　Peter Trapa. Candy sharing & difference boxes: examples of discrete dynamical systems [C/OL]. Utah Teachers' Math Circle 2007 September 10[2008-02-15]. http://www.math.utah.edu/teacherscircle/schedule_0708.html.

[4]　Glenn Iba, James Tanton. Candy sharing[J]. The American Mathematical Monthly, 2003, 110: 25-35.

（责任编辑：尹　闯）