

弱拟三角 Hopf 代数的研究* On Weakly-Quasitriangular Hopf Algebra

任北上¹, 吴洁霞², 郭映雪¹, 章维维¹

REN Bei-shang¹, WU Jie-xia², GUO Ying-xue¹, ZHANG Wei-wei¹

(1. 广西师范学院数学科学学院, 广西南宁 530023; 2. 南宁市第 18 中学, 广西南宁 530001)

(1. School of Mathematical Sciences, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 2. The Nanning 18th Middle School, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要: 证明了当 A, B 为弱拟三角 Hopf 代数时, 张量代数 $A \otimes_K B$ 为弱拟三角的; 当 A 为弱拟三角 Hopf 代数时, 卷积代数 $\text{Hom}_K(H, A)$ 是弱拟三角的.

关键词: Hopf 代数 张量代数 Yang-Baxter 方程

中图分类号: O153 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2009)03-0225-03

Abstract: It is proved that if A, B are weakly-quasitriangular Hopf algebra, then $A \otimes_K B$ is weakly-quasitriangular, and if A is weakly-quasitriangular, then $\text{Hom}_K(H, A)$ is also weakly-quasitriangular.

Key words: Hopf algebra, tensor algebra, Yang-Baxter equation

量子 Yang-Baxter 方程是杨振宁^[1]和 Baxter^[2]在物理领域中提出的新概念. 在数学领域中, 一个弱拟三角 Hopf 代数能解一个量子 Yang-Baxter 方程^[3]. 本文在文献[3]的基础上讨论张量代数 $A \otimes_K B$ 和卷积代数 $\text{Hom}_K(H, A)$ 的弱拟三角结构. 文中的 Hopf 代数固定在基本域 K 上, 记号 \otimes_K 简写为 \otimes , $\text{Hom}_K(H, A)$ 简写为 $\text{Hom}(H, A)$, 其它符号参考文献[4].

1 基本定义

定义 1^[3] 一个弱拟三角 Hopf 代数(或双代数)是一对 Hopf 代数(或双代数) (H, R) , 这里 H 为 Hopf 代数(双代数), $R = \sum R_1 \otimes R_2 \in H \otimes H$, 且满足:

$$(GQT. 1) R\Delta(h) = T\Delta(h)R, \forall h \in H,$$

$$(GQT. 2) R_{(12)}R_{(13)}R_{(23)} = R_{(23)}R_{(13)}R_{(12)},$$

其中 T 是一个扭转变换, $T(a \otimes b) = b \otimes a, \forall a, b \in H, R_{(12)} = \sum R_1 \otimes R_2 \otimes 1, R_{(13)} = \sum R_1 \otimes 1 \otimes R_2, R_{(23)} = \sum 1 \otimes R_1 \otimes R_2.$

收稿日期: 2009-03-05

作者简介: 任北上(1956-)男, 副教授, 主要从事环论, 模及 Hopf 代数的研究工作.

* 广西自然科学基金项目(0640070); 广西研究生教育创新计划项目(200610603R03); 新世纪广西高等教育教学改革工程“十一五”第四批项目资助.

定义 2^[5] 设 H, A 为有限维的 Hopf 代数, 则 $(\text{Hom}_K(H, A), *, \mu, \Delta_*, \epsilon, s_*)$ 构成 K 上的 Hopf 代数, 称为卷积 Hopf 代数. 其中 $*, \mu, \Delta_*, \epsilon, s_*$ 分别定义为 $*$: $\text{Hom}(H, A) \otimes \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(H, A), *(f \otimes g) = M_A(f \otimes g)\Delta_H; \mu: K \rightarrow \text{Hom}(H, A), \mu(1_K) = \mu_A \epsilon_H; \Delta_*: \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(H, A) \otimes \text{Hom}(H, A), \Delta_*(f) = \Delta_A f M_H; \epsilon: \text{Hom}(H, A) \rightarrow K, \epsilon(f) = \epsilon_A f \mu_H(1_K); s_*: \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(H, A), s_*(f) = s_A f s_H.$

2 主要结论

若 $(A, R^A), (B, R^B)$ 均为弱拟三角 Hopf 代数, 定义 $R^{A \otimes B} = \sum R_{(1)}^A \otimes R_{(1)}^B \otimes R_{(2)}^A \otimes R_{(2)}^B = (I \otimes T \otimes I)(R^A \otimes R^B)$, 那么, $R^{A \otimes B} \in A \otimes B \otimes A \otimes B.$

定理 1 若 $(A, R^A), (B, R^B)$ 均为弱拟三角 Hopf 代数, 那么 $(A \otimes B, R^{A \otimes B})$ 为弱拟三角 Hopf 代数.

证明 对 $\forall a \otimes b \in A \otimes B,$

$$\begin{aligned} R^{A \otimes B} \Delta_{A \otimes B}(a \otimes b) &= [(I \otimes T \otimes I)(R^A \otimes R^B)][(I \otimes T \otimes I)(\Delta_A \otimes \Delta_B)(a \otimes b)] = (I \otimes T \otimes I)[(R^A \otimes R^B)(\Delta_A \otimes \Delta_B)(a \otimes b)] = (I \otimes T \otimes I)(R^A \Delta_A(a) \otimes R^B \Delta_B(b)) = (I \otimes T \otimes I)(T \Delta_A(a) \cdot R^A \otimes T \Delta_B(b) R^B) = (I \otimes T \otimes I)[(T \Delta_A(a) \otimes T \Delta_B(b))(R^A \otimes R^B)] = (I \otimes T \otimes I)(T \Delta_A(a) \otimes T \Delta_B(b)) R^{A \otimes B} = (I \otimes T \otimes I)(T \Delta_A \otimes T \Delta_B)(a \otimes b) \end{aligned}$$

$$b) R^{A \otimes B} = T\Delta_{A \otimes B}(a \otimes b)R^{A \otimes B},$$

$$\begin{aligned} R_{(12)}^{A \otimes B} R_{(13)}^{A \otimes B} R_{(23)}^{A \otimes B} &= (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) [(R_{(12)}^A \otimes R_{(12)}^B)] (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) [(R_{(13)}^A \otimes R_{(13)}^B)] (I \otimes T \otimes T \otimes I) \cdot \\ &(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) [(R_{(23)}^A \otimes R_{(23)}^B)] = (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) [(R_{(12)}^A \otimes R_{(12)}^B)] (R_{(13)}^A \otimes R_{(13)}^B) (R_{(23)}^A \otimes R_{(23)}^B) = (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) (R_{(12)}^A R_{(13)}^A R_{(23)}^A \otimes R_{(12)}^B R_{(13)}^B R_{(23)}^B) = (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) (R_{(23)}^A R_{(13)}^A R_{(12)}^A \otimes R_{(23)}^B R_{(13)}^B R_{(12)}^B) = (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) [(R_{(23)}^A \otimes R_{(23)}^B) (R_{(13)}^A \otimes R_{(13)}^B) (R_{(12)}^A \otimes R_{(12)}^B)] = \\ &(I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) (R_{(23)}^A \otimes R_{(23)}^B) (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) (R_{(13)}^A \otimes R_{(13)}^B) (I \otimes T \otimes T \otimes I)(I \otimes I \otimes T \otimes I \otimes I) (R_{(12)}^A \otimes R_{(12)}^B) = R_{(23)}^{A \otimes B} R_{(13)}^{A \otimes B} R_{(12)}^{A \otimes B}, \end{aligned}$$

所以 $(A \otimes B, R^{A \otimes B})$ 为弱拟三角 Hopf 代数.

设 H, A 为有限维的 Hopf 代数, 且 (A, R) 为一个弱拟三角 Hopf 代数, 其中 $R = \sum R_{(1)} \otimes R_{(2)} \in A \otimes A$. 再令 $R^* = \sum R_{(1)}^* \otimes R_{(2)}^* \in \text{Hom}(H, A) \otimes \text{Hom}(H, A)$, 对 $\forall x, y \in H, R^*(x \otimes y) = \sum R_{(1)}^*(x) \otimes R_{(2)}^*(y) = \sum \varepsilon_H(x) R_{(1)} \otimes \varepsilon_H(y) R_{(2)}$.

定理 2 若 H, A 为有限维的 Hopf 代数, 其中 H 是交换的, 且 (A, R) 为一个弱拟三角 Hopf 代数, 则 $(\text{Hom}(H, A), R^*)$ 也是弱拟三角 Hopf 代数.

证明 对 $\forall a, b \in H, \forall f \in \text{Hom}(H, A)$,

$$\begin{aligned} (R^* * \Delta_*(f))(a \otimes b) &= M_{A \otimes A}(R^* \otimes \Delta_*(f)) \cdot \Delta_{H \otimes H}(a \otimes b) = \sum M_{A \otimes A}(R^* \otimes \Delta_*(f))(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2) = \sum M_{A \otimes A}(R^*(a_1 \otimes b_1) \otimes \Delta_*(f)(a_2 \otimes b_2)) = \sum R^*(a_1 \otimes b_1) \Delta_*(f)(a_2 \otimes b_2) = \sum (\varepsilon_H(a_1) R_{(1)} \otimes \varepsilon_H(b_1) R_{(2)}) ((f(a_2 b_2))_1 \otimes (f(a_2 b_2))_2) = \sum \varepsilon_H(a_1) R_{(1)} (f(a_2 b_2))_1 \otimes \varepsilon_H(b_1) R_{(2)} (f(a_2 b_2))_2 = \sum R_{(1)} (f(ab))_1 \otimes R_{(2)} (f(ab))_2 = \sum (f(ab))_2 R_{(1)} \otimes (f(ab))_1 R_{(2)} = \sum f(ba)_2 R_{(1)} \otimes f(ba)_1 R_{(2)} = \sum ((f(b_1 a_1))_2 \otimes (f(b_1 a_1))_1) (\varepsilon_H(a_2) R_{(1)} \otimes \varepsilon_H(b_2) R_{(2)}) = \sum T\Delta_*(f)(a_1 \otimes b_1) R_*(a_2 \otimes b_2) = (T\Delta_*(f) * R_*)(a \otimes b), \end{aligned}$$

所以 $R^* * \Delta_*(f) = T\Delta_*(f) * R_*$.

$\forall x, y, z \in H$,

$$\begin{aligned} R_{(12)}^* R_{(13)}^* R_{(23)}^* (x \otimes y \otimes z) &= \sum (R_{(1)}^* * r_{(1)}^*) \otimes (R_{(2)}^* * l_{(1)}^*) \otimes (r_{(2)}^* * l_{(2)}^*) (x \otimes y \otimes z) = \sum (R_{(1)}^* * r_{(1)}^*) (x) \otimes (R_{(2)}^* * l_{(1)}^*) (y) \otimes (r_{(2)}^* * l_{(2)}^*) (z) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum [M_{A \otimes A}(R_{(1)}^* \otimes r_{(1)}^*) \Delta_H(x)] \otimes [M_{A \otimes A}(R_{(2)}^* \otimes l_{(1)}^*) \Delta_H(y) \otimes [M_{A \otimes A}(r_{(2)}^* \otimes l_{(2)}^*) \Delta_H(z)]] = \\ &\sum [M_{A \otimes A}(R_{(1)}^* \otimes r_{(1)}^*)(x_1 \otimes x_2) \otimes [M_{A \otimes A}(R_{(2)}^* \otimes l_{(1)}^*)(y_1 \otimes y_2)]] \otimes [M_{A \otimes A}(r_{(2)}^* \otimes l_{(2)}^*)(z_1 \otimes z_2)] = \\ &\sum \varepsilon_H(x_1) R_{(1)} \varepsilon_H(x_2) r_{(1)} \otimes \varepsilon_H(y_1) R_{(2)} \varepsilon_H(y_2) l_{(1)} \otimes \varepsilon_H(z_1) r_{(2)} \varepsilon_H(z_2) l_{(2)} = \sum \varepsilon_H(x) R_{(1)} r_{(1)} \otimes \varepsilon_H(y) R_{(2)} \cdot \\ &l_{(1)} \otimes \varepsilon_H(z) r_{(2)} l_{(2)} = \sum \varepsilon_H(x) \varepsilon_H(y) \varepsilon_H(z) \cdot \\ &R_{(1)} r_{(1)} \otimes R_{(2)} l_{(1)} \otimes r_{(2)} l_{(2)} = \sum \varepsilon_H(x) \varepsilon_H(y) \cdot \\ &\varepsilon_H(z) r_{(1)} R_{(1)} \otimes l_{(1)} R_{(2)} \otimes l_{(2)} r_{(2)} = \sum \varepsilon_H(x) r_{(1)} R_{(1)} \otimes \\ &\varepsilon_H(y) l_{(1)} R_{(2)} \otimes \varepsilon_H(z) l_{(2)} r_{(2)} = \sum (r_{(1)}^* * R_{(1)}^*) \otimes \\ &(l_{(1)}^* * R_{(2)}^*) \otimes (l_{(2)}^* * r_{(2)}^*) (x \otimes y \otimes z) = \\ &R_{(23)}^* R_{(13)}^* R_{(12)}^* (x \otimes y \otimes z), \end{aligned}$$

所以 $R_{(12)}^* R_{(13)}^* R_{(23)}^* = R_{(23)}^* R_{(13)}^* R_{(12)}^*$. 定理 2 成立.

若 $(\text{Hom}(H, A), R^*)$ 为一个弱拟三角 Hopf 代数, $R^* = \sum R_{(1)}^* \otimes R_{(2)}^* \in \text{Hom}(H, A) \otimes \text{Hom}(H, A)$. 定义 $R = R^*(1_H \otimes 1_H) = \sum R_{(1)}^*(1_H) \otimes R_{(2)}^*(1_H) \in A \otimes A$.

定理 3 若 H, A 为有限维的 Hopf 代数, 且 $(\text{Hom}(H, A), R^*)$ 为一个弱拟三角 Hopf 代数, 则 (A, R) 也是弱拟三角 Hopf 代数.

证明 对 $\forall a \in A$, 显然存在一个 $f \in \text{Hom}(H, A)$, 使得 $f(1_H) = a$, 那么有

$$\begin{aligned} R\Delta(a) &= R^*(1_H \otimes 1_H) \Delta_A(f(1_H)) = (R^*(1_H \otimes 1_H) \otimes \Delta_*(f))(1_H \otimes 1_H) = M_{A \otimes A}(R \otimes \Delta_*(f))(1_H \otimes 1_H \otimes 1_H) = M_{A \otimes A}(R \otimes \Delta_*(f)) \Delta_{H \otimes H}(1_H \otimes 1_H) = R^* * \Delta_*(f)(1_H \otimes 1_H) = (T\Delta_*(f) * R^*) \cdot (1_H \otimes 1_H) = (T\Delta_*(f)(1_H \otimes 1_H))(R^*(1_H \otimes 1_H)) = \sum ((f(1_H))_2) \otimes ((f(1_H))_1) R = T\Delta(f(1_H)) R = T\Delta(a) R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{(12)} &= \sum R_{(1)} \otimes R_{(2)} \otimes 1_A = \sum R_{(1)}^*(1_H) \otimes R_{(2)}^*(1_H) \otimes 1_A, \\ R_{(13)} &= \sum r_{(1)}^*(1_H) \otimes 1_A \otimes r_{(2)}^*(1_H), \\ R_{(23)} &= \sum 1_A \otimes l_{(1)}^*(1_H) \otimes l_{(2)}^*(1_H), \\ R_{(12)} R_{(13)} R_{(23)} &= \sum (R_{(1)}^*(1_H) \otimes R_{(2)}^*(1_H) \otimes 1_A) (r_{(1)}^*(1_H) \otimes 1_A \otimes r_{(2)}^*(1_H)) (1_A \otimes l_{(1)}^*(1_H) \otimes l_{(2)}^*(1_H)) = \sum (R_{(1)}^*(1_H) r_{(1)}^*(1_H)) \otimes (R_{(2)}^*(1_H) \cdot \\ &l_{(1)}^*(1_H)) \otimes r_{(2)}^*(1_H) l_{(2)}^*(1_H) = \sum (R_{(1)}^* * r_{(1)}^*) (1_H) \otimes \\ &(R_{(2)}^* * l_{(1)}^*) (1_H) \otimes (r_{(2)}^* * l_{(2)}^*) (1_H) = \sum ((R_{(1)}^* * \\ &r_{(1)}^*) \otimes (R_{(2)}^* * l_{(1)}^*) \otimes (r_{(2)}^* * l_{(2)}^*)) (1_H \otimes 1_H \otimes 1_H) = \\ &\sum ((r_{(1)}^* * R_{(1)}^*) \otimes (l_{(1)}^* * R_{(2)}^*) \otimes (l_{(2)}^* * r_{(2)}^*)) (1_H \otimes 1_H \otimes 1_H) = \sum ((r_{(1)}^*(1_H) R_{(1)}^*(1_H)) \otimes (l_{(1)}^*(1_H) \cdot \end{aligned}$$

$R_{(2)}^*(1_H)) \otimes (l_{(2)}^*(1_H)r_{(2)}^*(1_H))) = \sum (1_A \otimes l_{(1)}^* \cdot$
 $(1_H) \otimes l_{(2)}^*(1_H))(r_{(1)}^*(1_H) \otimes 1_A \otimes r_{(2)}^*(1_H))(R_{(1)}^* \cdot$
 $(1_H) \otimes R_{(2)}^*(1_H) \otimes 1_A) = R_{(23)}R_{(13)}R_{(12)},$
 所以,定理 3 成立.

参考文献:

[1] Yang C N. S matrix for one-dimensional N -body problem with repulsive or attractive δ -function interaction [J]. Phys Review, 1968, 168:1920-1923.
 [2] Baxter R J. Partition function of the eight-vertex lattice

model[J]. Ann Phys, 1972, 70:193-228.

[3] 潘庆年,郝志峰,郭大昌. 弱准三角 Hopf 代数和解 Yang-Baxter 方程[J]. 数学学报, 2005, 48:889-894.
 [4] Sweedler M E. Hopf algebra[M]. New York: Benjamin, 1969.
 [5] 焦争鸣,张秀玲. 卷积 Hopf 代数及其拟三角结构[J]. 河南师范大学学报, 2005, 33:1-5.

(责任编辑:尹 闯)

《广西科学》投稿要求和注意事项

- 1 文稿务必论点明确,数据准确,文字精炼。每篇论文(含图、表、公式、参考文献等)一般不超过 5 000 字,研究简报不超过 2 000 字。
- 2 研究论文请按题目、作者姓名、作者单位、摘要(300 字以内)、关键词(3~8 个)、正文、致谢(必要时)、参考文献的顺序书写;后附与中文相应的英文题目、英文作者姓名、英文作者单位、英文摘要(一般不超过 1 500 字符)和英文关键词。
- 3 英文稿同时附中文稿一份。文稿请寄投打印稿 2 份,同时发送电子版文稿(接受方正小样、.TXT、.DOC、.WPS 文件),文稿务必做到清稿定稿;务必字迹清楚,用字规范,物理量和单位符合国家标准和国际标准;外文字母、符号用打印字体,必须分清大写、小写,正体、斜体(学名、量的符号等用斜体);上标、下标的字母、数码和符号的位置高低区别应明显可辨;外文缩略词和容易混淆的外文字、符号,请在第一次出现时注明。
- 4 文稿中只需附必要的图、表、照片,图需用专业画图工具绘好。照片请用光面相纸印出,图、照片大小以 80 mm×50 mm 或 160 mm×100 mm 为宜,要求清晰、层次分明。
- 5 参考文献只需择主要者列入,未公开发表的资料请勿引用。文献请在正文中标注,文献序号请按文中出现先后为序编排。书写格式,期刊:“序号 作者姓名(不超过 3 人者全部写出,超过者只写前 3 名,后加‘等’或‘et al.’。外文姓前名后,名缩写,不加缩写点,姓名用大写字母)。文章题目 [J]。期刊名(外文期刊可用标准缩写,不加缩写点),年,卷(期):起止页码”;如果期刊无卷号,则为“年(期):起止页码”。专著:“序号 作者姓名(英文姓名用大写)。书名 [文献类型标志]。版次(第一版不写)。出版地:出版单位(国外出版单位可用标准缩写,不加缩写点),出版年:起止页码。”
- 6 文责自负。本刊编辑部可以对采用稿作必要的删改,如作者不允许,务请在来稿中注明。
- 7 来稿请自留底稿,无论刊登与否恕不退稿,要求一式两份(并附一份不一稿多投的证明)。请勿一稿多投,收到本刊收稿回执后 3 个月未接到本刊采用通知时,可自行处理。双方另有约定者除外。
- 8 自治区、省(部)级以上重大科研项目及攻关项目,国家 863 计划项目,自然科学基金资助项目,开放实验室研究项目和拟到国际学术会议上宣读的论文优先发表,请作者注明(并注明项目编号)。
- 9 来稿不得侵犯他人版权,如有侵权,由投稿者负全部责任。
- 10 来稿一经采用,酌收版面费;刊登后,付稿酬(含《中国学术期刊(光盘版)》、中国期刊网、万方数据网及台湾华艺 CEPS 中文电子期刊服务网等网络发行的稿酬),并同时赠送给每位作者 1 本样刊。