

## 洛仑兹超混沌系统的同步控制\*

## Synchronization Control of Lorenz Hyper-chaotic System

刘爱民<sup>1</sup>, 张康明<sup>2</sup>LIU Ai-min<sup>1</sup>, ZHANG Kang-ming<sup>2</sup>

(1. 玉林师范学院, 广西玉林 537000; 2. 南昌陆军学院, 江西南昌 330013)

(1. Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Nanchang Academy of Army, Nanchang, Jiangxi, 330013, China)

摘要: 针对 Lorenz 超混沌系统, 以稳定性理论为基础, 提出一种超混沌系统的混合同步方法, 给出 Lorenz 超混沌系统实现自同步的充分条件以及控制律参数的取值范围, 构建 Lorenz 和 Chen 超混沌系统异结构同步的数学模型, 并对模型进行数值模拟. 数值模拟结果表明, 该方法能够实现同、异结构超混沌系统精确同步.

关键词: 超混沌系统 同步控制 混合同步控制

中图分类号: O415, TN918 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)02-0164-03

**Abstract** Synchronization of Lorenz hyper-chaotic systems is studied. Based on the Lyapunov stability theory, a combined synchronization method of hyper-chaotic systems is presented; the sufficient conditions and range of the controller's parameter for self-synchronization of Lorenz hyper-chaotic systems are derived and carefully proved. And the mathematic model of synchronization with different structure of Lorenz and Chen hyper-chaotic systems is given. The numerical simulations also illustrate the main theoretical results and the maneuverability of the obtaining method in this paper.

**Key words** hyper-chaotic systems, synchronization control, combined synchronization control

混沌是一种在确定性系统中所出现的类似随机而无规则的动力学行为. 近年来, 它已成为非线性科学研究领域的热点问题. 由于混沌系统具有内随机、连续宽谱和对初始值极端敏感等特点, 所以其特别适用于保密通讯, 而混沌同步是混沌保密通讯中的一项关键技术. 近年来, 已经出现许多混沌同步控制的方法<sup>[1-4]</sup>. 目前具有代表性的混沌系统的控制与同步方法有反馈控制、自适应控制、主动控制、脉冲控制等<sup>[3, 4]</sup>.

含有多个正 Lyapunov 指数的四阶或四阶以上的混沌系统称为超混沌系统. 超混沌系统具有更复杂的动力学行为. 一般低维系统的破译方法, 如回归映像、相空间重构和非线性预测等很难破译采用超混沌加密的信号. 因此, 研究超混沌系统同步更加具有实际

意义. 刘洋等<sup>[5]</sup>已经把混沌系统的同步控制方法和理论应用到超混沌系统同步, 并取得很好的理论效果. 本文在 Lorenz 超混沌系统<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 + x_4 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -\frac{8}{3}x_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = -\frac{28}{3}x_1 + x_2, \end{cases} \quad (1)$$

的基础上结合混沌控制中的非线性反馈控制给出一种超混沌混合同步的控制方法, 即在响应系统的耦合函数中同时设计线性与非线性反馈函数, 分别研究 Lorenz 超混沌系统自同步及其与超混沌 Chen 异结构系统同步问题, 先从理论上对控制方法进行分析证明, 再通过数值试验进行仿真, 结果表明这种方法是有效的.

## 1 超混沌 Lorenz 系统自同步控制

设 (1) 式为驱动系统, 受控响应系统为

收稿日期: 2008-11-17

作者简介: 刘爱民 (1973-), 女, 实验员, 主要从事计算机技术及其应用研究.

\* 广西壮族自治区教育厅科研项目 (200708LX163) 资助.

$$\begin{cases} y_1 = 10(y_2 - y_1) + u_1(t), \\ y_2 = 28y_1 - y_2 + y_4 - y_1y_3 + u_2(t), \\ y_3 = -\frac{8}{3}y_3 + y_1y_2 + u_3(t), \\ y_4 = -\frac{28}{3}y_1 + y_2 + u_4(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$  为系统同步控制变量. 设响应系统 (2) 和驱动系统 (1) 之间的状态误差为  $e_i = y_i - x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 误差向量  $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$ . 由 (2) 式减去 (1) 式, 获得误差系统方程:

$$\begin{cases} e_1 = 10(e_2 - e_1) + u_1(t), \\ e_2 = 28e_1 - e_2 + e_4 - y_1y_3 + x_1x_3 + u_2(t), \\ e_3 = -\frac{8}{3}e_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3(t), \\ e_4 = -\frac{28}{3}e_1 + e_2 + u_4(t). \end{cases} \quad (3)$$

由此可将超混沌 Lorenz 系统 (1) 与 (2) 的同步问题转化为误差系统 (3) 在原点  $(0, 0, 0, 0)$  的稳定性问题. 若选择适当的控制律  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  使误差系统 (3) 稳定, 则响应系统 (2) 与驱动系统 (1) 实现同步.

**定理 1** 对于驱动系统 (1) 和响应系统 (2), 若系统 (2) 的控制律取

$$\begin{cases} u_1(t) = 0, \\ u_2(t) = pe_2 - e_1(x_3 + e_3) + x_1e_3, \\ u_3(t) = -e_2(e_1 + x_1) - e_1x_2, \\ u_4(t) = qe_4, \end{cases} \quad (4)$$

则当控制器参数  $p < -\frac{361}{5}, q < -\frac{161}{36}$ , 驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 以指数速率渐近同步, 即对于任意初始值  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T$  和  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0))^T$  有  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| = 0$ .

**证明** 将控制律 (4) 代入误差系统 (3) 并整理可得

$$\begin{cases} e_1 = 10(e_2 - e_1), \\ e_2 = 28e_1 + (p - 1)e_2 + e_4, \\ e_3 = -\frac{8}{3}e_3, \\ e_4 = -\frac{28}{3}e_1 + e_2 + qe_4. \end{cases} \quad (5)$$

构造 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2). \quad (6)$$

将 (6) 式沿误差系统 (5) 求导, 同时综合 (5) 式, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -10e_1^2 + (p - 1)e_2^2 - \frac{8}{3}e_3^2 + qe_4^2 + 38e_1e_2 + \\ & 2e_2e_4 - \frac{25}{3}e_1e_4 = -5(e_1 - \frac{19}{5}e_2)^2 - 5(e_1 + \frac{5}{6}e_4)^2 - \end{aligned}$$

$$e_3^2 + (\frac{361}{5} + p)e_2^2 + (\frac{161}{36} + q)e_4^2.$$

显然, 当  $p < -\frac{361}{5}, q < -\frac{161}{36}$  时, 必有  $\dot{V} < 0$ . 误差系统 (3) 以指数速率收敛于全局平衡点  $e = 0$ , 即驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 实现同步.

**说明 1** 由于在响应系统 (2) 中同时引入线性而非线性反馈函数, 因此把这种同步控制方法称为超混沌系统的线性与非线性混合同步控制.

**说明 2** 当初值条件给定, 控制参数  $p, q$  直接影响状态变量  $x_i$  与  $y_i$  的同步速度.

## 2 超混沌 Lorenz 系统与 Chen 系统异结构同步控制

选取 Chen 超混沌系统:

$$\begin{cases} z_1 = 35(z_2 - z_1) + z_4, \\ z_2 = 7z_1 + 12z_2 - z_1z_3, \\ z_3 = -3z_3 + z_1z_2, \\ z_4 = \frac{1}{2}z_4 + z_2z_3. \end{cases} \quad (7)$$

以 (7) 作为驱动系统, (2) 式为响应系统. 设系统误差变量为  $e_i = y_i - z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 误差向量  $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$ , 则两个不同结构超混沌系统的同步误差系统可描述为

$$\begin{cases} e_1 = 10(e_2 - e_1) - 25(z_2 - z_1) - z_4 + u_1(t), \\ e_2 = 28e_1 - e_2 + e_4 + 21z_1 - 13z_2 + z_4 - \\ y_1y_3 + z_1z_3 + u_2(t), \\ e_3 = -\frac{8}{3}e_3 + \frac{1}{3}z_1 + y_1y_2 - z_1z_2 + u_3(t), \\ e_4 = -\frac{28}{3}e_1 + e_2 + \frac{28}{3}z_1 - z_2 - \frac{1}{2}z_4 - \\ z_2z_3 + u_4(t). \end{cases} \quad (8)$$

类似前面的讨论, 构造 Lyapunov 函数  $V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ , 可以证明如下定理.

**定理 2** 对于驱动系统 (7) 和响应系统 (2), 若系统 (2) 的控制律取

$$\begin{cases} u_1(t) = 25(z_2 - z_1) + z_4, \\ u_2(t) = pe_2 - 21z_1 + 13z_2 - z_4 + \\ e_1(z_3 + e_3) + z_1e_3, \\ u_3(t) = -\frac{1}{3}z_1 - e_2(e_1 + z_1) - e_1z_2, \\ u_4(t) = qe_4 - \frac{28}{3}z_1 + z_2 + \frac{1}{2}z_4 + z_2z_3, \end{cases} \quad (9)$$

则当控制器参数  $p < -\frac{361}{5}, q < -\frac{161}{36}$ , 驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 以指数速率渐近同步, 即对于任意初

始值:  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T$  和  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0))^T$  有  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e| = 0$ .

证明 将控制律 (9) 代入误差系统 (8), 整理可得到形式上和 (5) 式一致的误差系统. 显然, 当  $p < -\frac{361}{5}, q < -\frac{161}{36}$  时, 误差系统 (5) 以指数速率收敛于全局平衡点  $e = 0$ , 即驱动系统 (7) 和响应系统 (2) 实现同步.

说明 3 定理 2 的方法也可以应用到其它超混沌系统的异结构同步控制问题.

### 3 数值模拟

采用 Matlab 软件对以上讨论的结果进行数值模拟, 结果如图 1. 设驱动系统 (1) 初始值取  $x_1(0) = -2, x_2(0) = 1, x_3(0) = 7, x_4(0) = -2$ , 响应系统 (2) 初始值取  $y_1(0) = 3, y_2(0) = 2, y_3(0) = 8, y_4(0) = 3$ , 控制器参数取  $p = -80, q = -50$ , Lorenz 超混沌系统自同步误差收敛曲线如图 1(a) 所示. 设驱动系统 (7) 初始值取  $z_1(0) = -1, z_2(0) = -2, z_3(0) = 6, z_4(0) = -6$ , 响应系统 (2) 初始值取  $y_1(0) = -3, y_2(0) = 1, y_3(0) = 7, y_4(0) = -2$ , 控制器参数取

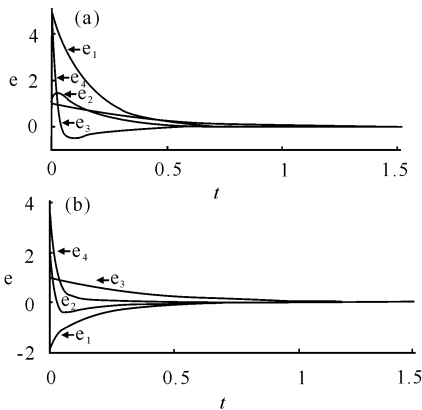


图 1 超混沌系统同步误差曲线

Fig. 1 Error curves of hyperchaotic synchronization

(a) 自同步误差曲线; (b) 异结构同步误差曲线

(a) Error curves of the self-synchronization; (b) Error

curves of the synchronization with diverse structures.

$p = -73, q = -45$ , Lorenz 和 Chen 超混沌系统的异结构同步误差收敛曲线如图 1(b) 所示. 图 1 结果表明, 控制律 (4) 能使 Lorenz 超混沌系统 (1) 和 (2) 快速单调同步, 控制律 (9) 也能使 Lorenz (2) 和 Chen 超混沌系统 (7) 快速单调同步. 同时由于最终误差皆趋近于零, 因此控制律  $u$  也将趋近于零, 从而不会改变响应系统 (2) 的混沌动力学特性.

### 4 结束语

本文以稳定性理论为基础, 针对 Lorenz 超混沌系统, 提出超混沌系统混合同步控制方法, 并证明该方法能够实现同、异结构超混沌系统精确同步. 文中的理论分析和数值试验的结果一致, 为超混沌同步控制的实际应用提供了理论基础. 在同一个系统中, 选取不同的控制器分别能够实现系统的自同步、异结构同步. 在实际应用中特别是超混沌系统同步应用于保密通讯中, 文中提出的设计方法能够使不同结构的驱动系统与响应系统之间实现同步, 使得超混沌系统同步更具有实际意义.

参考文献:

- [1] 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制 [J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2580-2583.
- [2] 蒲兴成, 黄席樾. 刘氏混沌系统的同步控制 [J]. 计算机仿真, 2006, 23(9): 311-314.
- [3] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析. 控制与同步 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 1.
- [4] 黄润生, 黄浩. 混沌控制及其应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003: 1.
- [5] 刘洋, 彭良玉. 超混沌陈系统的同步控制 [J]. 微计算机信息, 2008: 2-1, 14-15.
- [6] Yang Q, Zhang K, Chen G. Hyperchaotic attractors from a linearly controlled Lorenz system [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2009, 10(3): 1601-1617.

(责任编辑: 尹 闯)