DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.02.013
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(2): 124- 125

一类任意维数的 p-Laplacian发展方程解的渐近性质*

Asymptotic Behaviors of Solutions to a Evolution p-Laplacian Equation in Arbitrary Dimensions

凌征球
LING Zheng-qiu

(玉林师范学院,广西玉林 537000)
(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要: 应用比较原理,讨论空间 R^n 中一类发展的 p -Laplacian方程的渐近性质,得到其弱解熄灭的条件.

关键词: 发展方程 p -Laplacian方程 熄灭
中图法分类号: O175.14 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)02-0124-02

Abstract By using comparasion principle, the asymptotic behaviors of a evolution p -Laplacian equation in R^n is discussed, and the condition of weak extincted solution is obtained.

Key words evolution equation, p -Laplaciac equation, extinction

区域 Q 中发展的 p -Laplaciac方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m), (x,t) \in K \times (0,+\infty) \quad (1)$$

满足初边值条件:

$$u(x,t) = 0, \text{for all } (x,t) \in \partial K \times (0,+\infty), \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \text{for all } x \in K, \quad (3)$$

其中 $p > 1, m > 0$ 是两个给定的实数,$K \subset R^n$ 是一个有界的光滑区域,$Q = K \times (0,+\infty)$,$u_0(x) \in C(\overline{K}) \cap W_0^{1,p}(K)$ 是一个非零非负的连续函数.该方程具有广泛的数学与物理应用背景,主要应用于描述扩散现象的渐进过程,特别是在非牛顿流体理论、湍流等研究领域[1-3].

由于在满足 $\nabla u^m = 0$ 的点,拟线性方程(1)具有退化性(如果 $p > 2$)或者具有奇异性(如果 $1 < p < 2$),因此方程(1)通常不存在古典解.问题(1)~(3)弱解的存在性可参见文献[4,5].本文得到其弱解的渐近行为,也就是弱解的熄灭条件.

1 定义及引理

定义 1 一个非负的函数 $u(x,t)$ 称为初边值问题(1)~(3)的一个弱解,如果 u 满足下列条件:

(i) $u \in C(\overline{K} \times (0,+\infty)) \cap L^p(0,+\infty); W_0^{1,p}(K), u_t \in L^2(Q)$,

(ii) $\int_K u(x,T)h(x,T)\,dx - \int_K u_0(x)h(x,0)\,dx = \int_0^T\int_K (u\frac{\partial h}{\partial t} - |\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m \nabla h)\,dx\,dt$,

对所有的 $T \in (0,+\infty)$ 和满足 $h(x,T) = 0$ 和 $h = 0, (x,t) \in \partial K \times (0,+\infty)$ 的所有函数 $h \in C^1(\overline{K} \times [0,T])$.

引理 1[5] 假设 $u(x,t)$ 是问题(1)~(3)的一个弱解,如果函数 $v(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant \operatorname{div}(|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m), (x,t) \in K \times (0,+\infty), v(x,0) \geqslant u(x,0) = u_0(x), \forall x \in K, v(x,t) \geqslant u(x,t), \forall (x,t) \in \partial K \times (0,+\infty),$$

那么对于所有的 $(x,t) \in Q$,有 $v(x,t) \geqslant u(x,t)$.

2 弱解的渐近性质

定理 1 假设 $u(x,t)$ 是问题(1)~(3)的一个弱解,如果 $0 < m(p-1) < 1$,那么存在一个时间 T,当 $(x,t) \in K \times (T,+\infty)$ 时有 $u(x,t) = 0$.

收稿日期: 2008-11-17
作者简介: 凌征球(1963-),男,副教授,主要从事偏微分方程及应用研究。
* 国家自然科学基金项目(10626024)资助。

证明　记 $s_+ = \max\{s,0\}, \forall s \in (-\infty,+\infty)$.

定义一个辅助函数:

$$v(x,t) = k^{\frac{1}{m}}(T-t)_+^{\frac{1}{1-m(p-1)}}(\ln(2H+x_1+\cdots+x_n))^{\frac{1}{m}}, \tag{4}$$

其中

$$k = \left(\frac{(p-1)^m(1-m(p-1))^m n^{mp/2}}{H^{mp}\ln(3H)}\right)^{\frac{1}{1-m(p-1)}},$$

$$T = \left(\frac{\|u_0\|_\infty}{k^{\frac{1}{m}}(\ln H)^{\frac{1}{m}}}\right)^{1-m(p-1)}, \tag{5}$$

$$H = \sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in K}\{|x_1|+\cdots+|x_n|\}. \tag{6}$$

由于

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k^{\frac{1}{m}}\frac{-1}{1-m(p-1)}(T-t)_+^{\frac{m(p-1)}{1-m(p-1)}}(\ln(2H+x_1+\cdots+x_n))^{\frac{1}{m}}, \tag{7}$$

$$|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m = k^{p-1}n^{\frac{p-2}{2}}(T-t)_+^{\frac{m(p-1)}{1-m(p-1)}}((2H+x_1+\cdots+x_n)^{1-p},\cdots,(2H+x_1+\cdots+x_n)^{1-p}),$$

$$\mathrm{div}(|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m) = k^{p-1}n^{\frac{p}{2}}(T-t)_+^{\frac{m(p-1)}{1-m(p-1)}}(1-p)(2H+x_1+\cdots+x_n)^{-p}, \tag{8}$$

再由(4)~(8)式,可以得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant \mathrm{div}(|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m). \tag{9}$$

又显然

$$v(x,t) \geqslant u(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \partial K \times (0,+\infty), \tag{10}$$

$$v(x,0) = k^{\frac{1}{m}}T^{\frac{1}{1-m(p-1)}}\ln(2H+x_1+\cdots+x_n)^{\frac{1}{m}}$$
$$= k^{\frac{1}{m}}\frac{\|u_0\|_\infty}{k^{\frac{1}{m}}(\ln H)^{\frac{1}{m}}}\ln(2H+x_1+\cdots+x_n)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\ln(2H+x_1+\cdots+x_n)}{\ln H}\right)^{\frac{1}{m}}\|u_0\|_\infty \geqslant \|u_0\|_\infty \geqslant \|u_0\| = u_0, \forall x \in K, \tag{11}$$

应用引理 1和(9)~(11)式,对于所有的 $(x,t)\in Q$,可以得到 $u(x,t) \leqslant v(x,t)$.

根据函数 $v(x,t)$的定义,当 $(x,t)\in K\times(T,+\infty)$时,显然有 $u(x,t) = 0$.

参考文献:

[1] Martinson L K, Paplov K B. Unsteady shear flows of a conducting fluid with a theologocal power law [J]. Magnit Gidrodinamikia, 1970(2): 50-58.

[2] Ladyzenskaya O A. New equation for the description of incompressible fluid and solvability in the large boundary problem for them [J]. Proc Steklov inst Math, 1967, 102 95-118.

[3] Dibenedetto E. Degenerate Parabolic Equations [M]. New York Springer-Verlag, 1993.

[4] Zhao J. Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u,u,x,t)$ [J]. J Math Anal Appl, 1993, 172: 130-146.

[5] Wu Z, Zhao J, Yin J, et al. Nonlinear diffusion equations [M]. Singpore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2001.

(责任编辑: 尹　闯)

我国发明一种功能化聚烯烃长效流滴膜

聚乙烯树脂被广泛应用在农用流滴膜上,但是非极性的聚乙烯亲水性差。要解决聚乙烯树脂亲水性问题,一般采用两种方法,一种是内添加法,就是将具有表面活性的流滴剂制成母粒,与聚烯烃树脂混合后吹膜,使具有亲水基团的流滴剂逐渐地迁移到薄膜表面,用水润湿,凝结在薄膜表面的细小水滴迅速扩散展开形成水膜顺薄膜流下,从而起到防水滴的作用。另一种是外涂法,就是将防水滴剂溶液涂在聚乙烯薄膜表面,使其具有亲水性。国内目前主要采用在聚乙烯树脂内添加流滴剂,由于流滴剂和聚乙烯树脂的极性相差较大,极易发生迁移和表面流失,故流滴持效期较短,一般为 3~4 个月。人们试图通过改变流滴剂结构、低聚加大分子量等缓释手段来提高流滴期,但是收效甚微,而且还存在防滴时间短和防滴不防雾甚至致雾的问题。

最近中国科学院长春应化所的科研人员发明了一种功能化聚烯烃长效流滴膜及其制备方法。该方法将流滴剂接枝到聚乙烯分子链上,使流滴剂分子以共价化学键与聚乙烯分子链键合在一起。由于流滴剂单体中含有醚键、羟基、羧基、酯基等亲水基团,极易被水浸润,实现了流滴功能。这种方法由于流滴剂单体被接枝到聚乙烯分子链上,从而在使用过程中有效降低了流滴剂迁移和流失的速度,使流滴膜流滴期可以大于 12 个月。为了延长棚膜的流滴期,日本、韩国以及欧美发达国家广泛采用 PET、EVA膜,价格较高。而我国发明的这种长效聚乙烯棚膜价格低,具有长效流滴期,与国外同类产品或技术相比有较强的竞争力。

(据科学网)