DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.02.012
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(2): 117~119

不同分布 $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性*

Convergence of Weighted Sums of Different Distributed $\tilde{\varphi}$ Mixing Random Sequences

冯凤香

FENG Feng-xiang

(桂林理工大学数理系,广西桂林 541004)

(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 在不同分布的情况下,讨论 $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性,给出其收敛的新判据,推广了 Stout和 Thrum定理.

关键词: $\tilde{\varphi}$ 混合序列 加权和 完全收敛 强收敛

中图法分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)02-0117-03

Abstract Some sufficient conditions of the complete convergence and strong convergence for weighted sums of different distributed $\tilde{\varphi}$ mixing random sequences are established. The results extend the theorems of Stout and Thrum.

Key words $\tilde{\varphi}$ mixing sequence, weighted sums, complete convergence, strong convergence

$\tilde{\varphi}$ 混合与通常的 φ 混合有一定的类似,但并不相同,它们互不包含. $\tilde{\varphi}$ 混合是一类极为广泛的相依混合序列.文献[1~3]讨论 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的若干收敛性质.文献[4]讨论同分布的 $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性.本文进一步讨论 $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性,并将文献[4]的定理 1和定理 2由同分布推广到不同分布的情况,这推广了 Stout和 Thrum定理.

本文以 c 记与 n 无关的正常数,"$\ll$"表示通常的大"O".

1 相关定义和引理

设 $\{X_i, i\in N\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量序列, $\mathcal{F}_S = \sigma(X_i, i\in S\subset N)$ 为 σ-域,在 $\mathcal{F}$ 中给定 σ-域 $\mathcal{F}, \mathcal{R}$,令 $\varphi(\mathcal{F}, \mathcal{R}) = \sup\{|P(B|A) - P(B)|; A\in \mathcal{F}, P(A) > 0, B\in \mathcal{R}\}$.引入相依系数:对 $k\geqslant 0$,令

$$\tilde{\varphi}(k) = \sup\{\varphi(\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T), \text{有限子集 } S, T\subset N, \text{且 } \mathrm{dist}(S, T)\geqslant k\}, \quad (1)$$

显然, $0\leqslant \tilde{\varphi}(k+1)\leqslant \tilde{\varphi}(k)\leqslant 1$,且 $\tilde{\varphi}(0) = 1$.

定义 1 对随机序列 $\{X_i, i\in N\}$,若存在 $k\in N$,使 $\tilde{\varphi}(k) < 1$,则称 $\{X_i, i\in N\}$ 为 $\tilde{\varphi}$ 混合序列.

注 对 $\tilde{\varphi}$ 混合序列,可以不失一般性地假设 $\tilde{\varphi}(1) < 1$.

引理 1[5] 设 $\{X_i, i\in N\}$ 是 $\tilde{\varphi}$ 混合序列, $EX_i = 0, E|X_i|^q < \infty, q > 2, \tilde{\varphi}(1) < 1$ 则存在仅依赖于 q 和 $\tilde{\varphi}$ 的常数 c,使得对 $\forall n\geqslant 1$,有 $E|S_n|^q\leqslant c\{(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)^{q/2} + \sum_{i=1}^{n} E|x_i|^q\}$,其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

引理 2[6] 设 $\{X_i, i\in N\}$ 是任意随机变量序列,如果存在某 r.v. X,使得对任意 $x > 0, i\geqslant 1$,有 $P(|X_i|\geqslant x)\leqslant cP(|X|\geqslant x)$,则对 $\forall \alpha > 0, \forall t > 0$,有 $E|X_i|^{\alpha} I_{(|X_i|\leqslant t)}\leqslant c(E|X|^{\alpha} I_{(|X|\leqslant t)} + t^{\alpha} P(|X| > t))$.

以下设 $\{X_i: i\geqslant 1\}$ 为一随机变量序列, $\{a_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$ 是下三角实数矩阵,即当 $i > n$ 时, $a_{ni} = 0$,记 $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$.

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_i, i\in N\}$ 是 $\tilde{\varphi}$ 混合序列, $0 < T\leqslant$

收稿日期: 2008-11-17

作者简介: 冯凤香(1975-),女,讲师,主要从事概率极限理论研究。

* 国家自然科学基金项目(No. 10661006),广西科学基金项目(No. 0731012),广西教育厅科研项目(No. 200807LX188)资助。

1,且

$$EX_i = 0, \tag{2}$$

若存在某 r. v. X,满足

$$E|X|^{1/\tau} < \infty, \tag{3}$$

使得对任意 $x > 0, i \geqslant 1$,有 $P(|X_i| \geqslant x) \leqslant cP(|X| \geqslant x)$,且

$$|a_{ni}| \leqslant cn^{-2\tau-\delta}, 0 < \delta < \tau/2. \tag{4}$$

当 $0 < \tau \leqslant 1/2 - \delta$时,进一步假设

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \leqslant cn^{-\theta}, \theta > 0, \tag{5}$$

则 $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \xrightarrow{c} 0, n \to \infty$.

证明 记 $X_{ni} = X_i I(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-\delta})$, $\tilde{X}_{ni} = X_{ni} - EX_{ni}$,则有

$$\{|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i| > \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{|a_{ni}X_i| > n^{-\delta}\} \cup \{|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni}| > \varepsilon\} \triangleq A_n \cup B_n.$$

故只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty. \tag{7}$$

先证(6)式.由(2)~(4)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\{|a_{ni}X_i| > n^{-\delta}\} \ll \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\{|X_i| > cn^{2\tau}\} \ll \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\{|X| > cn^{2\tau}\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP(|X| > cn^{2\tau}) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n\sum_{j=n}^{\infty} P(cj^{2\tau} < |X| < c(j+1)^{2\tau}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} nEI(cj^{2\tau} < |X| < c(j+1)^{2\tau}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} j^2 EI(cj^{2\tau} < |X| < c(j+1)^{2\tau}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} E|X|^{1/\tau} I(cj^{2\tau} < |X| < c(j+1)^{2\tau}) \ll E|X|^{1/\tau} < \infty.$$

故(6)式成立.

为证(7)式,先证

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni}) \to 0, n \to \infty. \tag{8}$$

由(2)式和(4)式得

$$|E(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni})| = |\sum_{i=1}^{n} E(a_{ni}X_i - a_{ni}X_{ni})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i| I(|a_{ni}X_i| > n^{-\delta}) \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X| I(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) \ll \sum_{i=1}^{n} n^{\delta/\tau - \delta} E|a_{ni}X|^{1/\tau} \ll n^{-1-\delta} \to 0, n \to \infty,$$

故(8)式成立.现在只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}| > \frac{\varepsilon}{2}) < \infty, \forall \varepsilon > 0. \tag{9}$$

在引理1中,取 $q > \max(2, 2/\tau, 2/\theta, 1/(2\tau - 1/2 + \delta))$,且由Markov不等式、$C_r$不等式、(2)式和(4)式有

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}| > \frac{\varepsilon}{2}) \ll E|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}|^q \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}\tilde{X}_{ni}|^q + (\sum_{i=1}^{n} E(a_{ni}\tilde{X}_{ni})^2)^{q/2} \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^q I(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-\delta}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(|a_{ni}X| \leqslant n^{-\delta}) + \sum_{i=1}^{n} n^{-\delta q} P(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^{1/\tau} n^{-\delta(q-1/\tau)} + \sum_{i=1}^{n} n^{-\delta q} P(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll n^{-1-\delta q} + \sum_{i=1}^{n} n^{-\delta q} P(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2}. \tag{10}$$

由 q的取法,显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta q} < \infty. \tag{11}$$

由(6)式的证明有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} n^{-\delta q} P(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X| > n^{-\delta}) < \infty. \tag{12}$$

当 $0 < \tau \leqslant 1/2 - \delta$时,由(5)式有 $(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll n^{-\theta q/2}$;当 $\tau > 1/2 - \delta$时,由(4)式有 $(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \leqslant n^{(1-4\tau-2\delta)q/2}$.

由 q的取法,都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} < \infty. \tag{13}$$

综合(11)~(13)式,得(9)式成立.

定理2 设 $\{X_i, i \in N\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,并且 $0 < \tau \leqslant 1$,

$$EX_i = 0, \tag{14}$$

若存在某 r. v., X,满足

$$E|X|^{1/\tau} < \infty, \tag{15}$$

使得对任意 $x > 0, i \geqslant 1$,有 $P(|X_i| \geqslant x) \leqslant cP(|X| \geqslant x)$,且

$$|a_{ni}| \leqslant cn^{-2\tau-\delta+\tau\delta}, 0 < \delta < \tau/2, \tag{16}$$

则 $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.

证明 记 $X_{ni} = X_i I(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-\delta})$, $\tilde{X}_{ni} = X_{ni} - EX_{ni}$,则有

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(X_i - X_{ni}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(X_{ni} - EX_{ni}) + E\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni}) \triangleq T_{n1} + T_{n2} + T_{n3},$$

故要证定理 2,只需证 $T_{ni} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty, i = 1, 2, 3.$

先证 $T_{n1} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.由 (14) ~ (16) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_i \neq X_{ni}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|a_{ni}X_i| > n^{-W}) \ll \sum_{n=1}^{\infty} P(|a_{ni}X| > n^{-W}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{W/T} E|a_{ni}X|^{1/T} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+W} < \infty.$$

因此,根据 Borel–Cantelli引理,有 $T_{n1} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.

再证明 $T_{n2} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.

在引理 1中,取 $q > \max(2, 2/T, 1/(2T - 1/2 + W - TW))$,由 Markov不等式、$c_r$不等式、(14) ~ (16) 式有

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}| > \frac{X}{2}) \ll E|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}|^q \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}\tilde{X}_{ni}|^q + (\sum_{i=1}^{n} E(a_{ni}\tilde{X}_{ni})^2)^{q/2} \ll$$

$$\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^q I_{(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-W})} + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll$$

$$\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I_{(|a_{ni}X| \leqslant n^{-W})} + \sum_{i=1}^{n} n^{-Wq} P(|a_{ni}X| > n^{-W}) +$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^{1/T} n^{-W(q-1/T)} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} n^{-Wq} P(|a_{ni}X| > n^{-W}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \ll n^{-1+W-Wq} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} n^{-Wq} P(|a_{ni}X| > n^{-W}) + (\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2}.$$

由 q的取法,显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+W-Wq} < \infty, \tag{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} n^{-Wq} P(|a_{ni}X| > n^{-W}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} n^{-Wq+\frac{W}{T}} \cdot E|a_{ni}X|^{\frac{1}{T}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-Wq+W} < \infty. \tag{18}$$

由 (16) 式有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2)^{q/2} \leqslant n^{(1-4T-2W+2TW)q/2}. \tag{19}$$

综合 (17)~ (18) 式得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}| > \frac{X}{2}) < \infty$,

故 $T_{n2} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.

最后证明 $T_{n3} \xrightarrow{a.s.} 0, n \to \infty$.由 (14)~ (16)式有

$$|T_{n3}| = |E(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni})| = |\sum_{i=1}^{n} E(a_{ni}X_i - a_{ni}X_{ni})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i| I_{(|a_{ni}X_i| > n^{-W})} \ll \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X| \cdot I_{(|a_{ni}X| > n^{-W})} \leqslant \sum_{i=1}^{n} n^{W(1/T-1)} E|a_{ni}X|^{1/T} \ll n^{-1} \to 0, n \to \infty.$$

参考文献:

[1] 吴群英. ͡h混合序列的完全收敛性和强收敛性 [J]. 工程数学学报, 2004, 21(1): 75-80.

[2] 何宝珠. ͡h混合序列的几乎处处收敛速度 [J]. 桂林工学院学报, 2006, 25(2): 256–258.

[3] 邓光明,贾贞. 不同分布 ͡h混合序列的强收敛性 [J]. 桂林工学院学报, 2006, 26(4): 583–585.

[4] 唐国强,伍艳春. ͡h混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性 [J]. 桂林工学院学报, 2004, 24(1): 100–102.

[5] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用 [J]. 科学通报, 1998, 43(17): 1823–1827.

[6] 刘筱萍. 不同分布混合序列的完全收敛性 [J]. 桂林工学院学报, 2006, 26(2): 298–301.

(责任编辑: 尹 闯)

生物电能要比生物燃料更有效

生物能源主要包括生物电能和生物燃料两大类。生物电能指的是利用各种植物秸秆进行发电,而生物燃料则是以玉米等作物和农业废弃物为原料制造的乙醇等燃料。生物能源既是可再生能源,又是无污染或低污染的绿色能源。

美国加利福尼亚大学默塞德分校等机构的研究人员对生物电能和生物燃料的对比研究发现,如果用同等面积土地上种植的作物来发电或制造乙醇供应给汽车,那么使用生物电能的汽车的行驶里程要比使用乙醇的汽车多出 81%。前者的温室气体减排效果也要远远大于后者。无论从使用效果还是从环保角度考虑,利用生物电能都比利用生物燃料更为可行。但是研究人员表示,这项研究并没有考虑水资源消耗、生产成本等因素。

(据科学网)