DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.014
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 48~ 51

分位数回归模型的经验似然置信区域

Empirical Likelihood Confidence Regions for Quantile Regression Models

韦盛学
WEI Sheng-xue

(玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000)
(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要: 在强平稳 O-混合样本下,利用光滑经验似然方法,给出分位数回归模型参数的经验似然置信区域,得到类似于独立同分布时的结果.该结果优于非光滑 LAD方法所得到的结果.

关键词: 分位数回归模型 置信区域 光滑经验似然
中图法分类号: O212.2 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0048-04

Abstract We employ the smoothed empirical likelihood to construct the confidence regions of quantile regression models under strongly stationary O-mixing dependent samples, which generalizes results from independent and identical distribution (i. i. d.). The results are better than that of non-smooth LAD.

Key words quantile regression models, confidence regions, smoothed empirical likelihood

分位数回归模型是由 Koenker 和 Bassett[1,2]引入的.在此之前,由于分位数回归本身计算的复杂性,所以没有象经典的回归分析那样迅速普及,但是随着计算机技术的不断突破,分位数回归软件包已是主流统计软件 R SAS等的座上客.分位数回归自然而然地成为经济、医学、教育学等领域的常用分析工具.分位数回归方法因为考虑了分布函数各局部信息而比只考虑条件期望的普通最小二乘回归方法更具有优势.又因为分位数回归不用对误差项的分布做特定的假设,因此适用性更强,已在诸多领域得到了广泛的应用,特别是在具有厚尾分布的金融数据分析方面.吴建南[3]对分位数回归方法在国内外的研究应用作了一些简单的介绍,从介绍中可以看出,国内对其研究相对较少.

经验似然方法是由 Owen[4,5]引入的一种非参数推断方法,随后 Chen S. X.和 Hally P[6]引入光滑经验似然方法,采用核光滑技术构造分位数的经验似然置信区间,使得所获得的区间断点总在观察区间之内.通过光滑方法,置信区间覆盖误差由 $O(n^{-1/2})$ 下降到 $O(n^{-1})$,再通过纠偏技术可使误差进一步下降到 $O(n^{-2})$.因此,这种分位数的经验似然区间很有吸引力.Whang Yoon-Jae[7]讨论独立同分布情形下分位数回归模型的经验似然置信区域.本文讨论强平稳 O-混合样本下,线性分位数回归模型参数的经验似然置信区域,得到了类似于独立同分布时的结果.

1 定义及引理

考虑线性分位数回归模型

$$Y_i = X_i' U_0 + U_i,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.1}$$

$Y_i \in R$ 为可观测的相依变量,X_i 为 k 维回归向量,U_0 为 k 维的待估回归系数,U_i 为不可观测误差,满足 $P(U_i \leq 0 | X_i) = q, a.s., \forall i \geq 1$,其中 $0 < q < 1$. $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 是来自总体 $(X, Y) \in R^k \times R$ 的强平稳 O-混合样本.我们主要考虑在给定 q 值时,求 U_0 的置信区间.

考虑估计方程

$$Eg(Y_i, X_i, U) = E[I(Y_i \leq X_i' U) - q] X_i = 0, \tag{1.2}$$

其中 $I(\circ)$ 为示性函数.

由于估计方程(1.2)不是光滑的,故考虑对示性函数进行光滑.引入有界连续的核函数 $K(u)$,且有

收稿日期: 2007-07-09
作者简介: 韦盛学(1974-),男,硕士,讲师,主要从事非参数统计方面的研究.

紧支撑 $[-1, 1]$,并对某个 $r\ge 2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^j K(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases}1, & j=0,\\ 0, & 1\le j\le r-1.\end{cases}$$

定义 1 $G(x)=\int_{u<x}K(u)\,\mathrm{d}u$, $G_h(x)=G(x/h)$, $h=h_n$,其中 $\lim_{n\to\infty} h\to 0$.

可以令

$$Z_i = Z_i(\theta_0) = [G_h(X_i'\theta_0 - Y_i) - q]X_i, \quad (1.3)$$

则光滑经验对数似然函数为 $\ell_1(\theta_0) = -2\cdot \min_{p_i:\sum p_i z_i(\theta_0)=0}\sum_i^n \log(np_i)$,其中 $p_i\ge 0, \sum_{i=1}^n p_i=1$.类似 Owen[5]的讨论,可得光滑经验函数为

$$\ell_1(\theta_0)=\sum_{i=1}^n\log(1+\lambda'(\theta_0)Z_i(\theta_0)), \quad (1.4)$$

其中 $\lambda(\theta_0)\in R^k$ 满足

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i(\theta_0)/(1+\lambda'(\theta_0)Z_i(\theta_0))=0. \quad (1.5)$$

引理 1[9] 设 $U_1,\cdots,U_n$ 是一元实值 ρ-混合的随机变量, $EU_i=0$, $i=1,\cdots,n$, 且混合速度满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{1/2}(n)<\infty$. 若对某个 $r\ge 2$,有 $\sup E|U_n|^r<\infty$.,则 $E\left|\sum_{i=1}^n U_i\right|^r \le Cn^{r/2}\sup E|U_n|^r$.

引理 2 设 $\{U_i: i\ge 1\}$ 为一元强平稳 ρ-混合的随机变量,混合速度满足: $\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{1/2}(n)<\infty$,假设 $EU_1=0$, $E|U_1|^2<\infty$,则 $B^2=\sigma^2+2\sum_{i=1}^{\infty}E(U_1U_{1+i})$ 收敛且有 $\sup_{-\infty<x<\infty}\left|p\{\frac{\sqrt{n}\,\bar U}{B^2}<x\}-\Phi(x)\right|\to 0$,其中 $\bar U=\frac{1}{n}\sum_1^n U_i$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.

注 引理 2为文献 [10]中系 4.7的特例.

2 主要结果

以下均假定 C 为大于 0的常数,而且在不同的地方表示不同的值; $A>0$ 表示 A 为正定矩阵; A_{ij} 表示 A 的第 i 行第 j 列元素.给出如下假设条件.

(1) $E\|X_1\|^4<\infty$, ($\|X\|$ 表示 X 的欧式模),

(2) $\sum_{i=1}^{n}\rho^{1/2}(n)<\infty$,

(3) $A_0\equiv q(1-q)E(X_1X_1')>0$,

(4) 存在 $A_1>0$, 使得 $q(1-q)E(X_1X_1') + 2\sum_{i=1}^{n-1}E\{X_1X_{i+1}'E[(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)(G_h(X_{i+1}'\theta_0-Y_{i+1})-q)|X_1,X_{i+1}]\} = A_1+o(1)$,

(5) 设 $F(\cdot|x)$ 为 U_i 在 $X_i=x$ 时的条件分布函数, $f(\cdot|x)$ 为对应的条件密度,而且 $F(0|x)=q$ 几乎对每一个 x 都成立. $f(u|x)$ 作为 u 的函数在 0的邻域内非零有界,且有 r 阶连续导数,

(6) 存在 $A>0$, 使得 $q(1-q)E(X_1X_1') + 2\sum_{i=1}^{t-1}E\{X_1X_{i+1}'E[(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)(G_h(X_{i+1}'\theta_0-Y_{i+1})-q)|X_1,X_{i+1}]\} = A+o(1)$.

引理 3 在条件(5)下, $EZ_1(\theta_0)Z_1(\theta_0)'=q(1-q)E(X_1X_1')+o(1)$.

证明 $EZ_1(\theta_0)Z_1(\theta_0)' = E[X_1X_1'(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)^2] = E\{E[X_1X_1'(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)^2|X_1]\} = E\{X_1X_1'E[(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)^2|X_1]\}$.

设给定 X_1, Y_1 的条件分布函数为 $F_{x_1}(y)$,那么,由分部积分法得

$D\equiv E[(G_h(X_1'\theta_0-Y_1)-q)^2|X_1] = q^2+2\int_{-\infty}^{\infty}F_{X_1}(y)[G_h(X_1'\theta_0-y)-q]\frac{1}{h}K(X_1'\theta_0-y)\,\mathrm{d}y = q^2-2\int_{\infty}^{-\infty}F_{X_1}(X_1'\theta_0-ht)[\int_{-\infty}^{t}K(u)\,\mathrm{d}u-q]K(t)\,\mathrm{d}t$, (令 $t=(X_1'\theta_0-y)/h$) $= q^2+2(q+o(1))\int_{-\infty}^{\infty}K(t)[\int_{-\infty}^{t}K(u)\,\mathrm{d}u-q]\,\mathrm{d}t = q^2+2q\int_{-\infty}^{\infty}K(t)[\int_{-\infty}^{t}K(u)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}t-2q^2+o(1) = q(1-q)+o(1)$.

因此引理 3得证.

定理 1 若条件(1)~(5)成立,则 $\ell_1(\theta_0)\xrightarrow{d}\xi'A_0^{-1}\xi$, $n\to\infty$,其中 $\xi\sim N_k(0,A_1)$.

由于 A_1, A_0 未知,定理 1的结果没有实用意义,我们采用分组经验似然方法去克服通常经验似然方法的缺点.

设 $t=[n^{\tau}]$, $0<\tau\le 1/3$, $g=[n/t]$,为了方便,不妨令 $g=n/t$, $\omega_i=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}Z_{(i-1)t+j}$, $i=1,\cdots,g$.考虑分组经验似然比:

$$R(\theta_0)=\sup_{p_1,\cdots,p_g}\left\{\prod_{j=1}^{g}(gp_j)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{g}p_j=1, p_j\ge 0, \sum_{j=1}^{g}p_j\omega_j(\theta_0)=0\right\}.$$

容易得出(对数)分组经验似然函数:

$$l(\theta_0)=2\sum_{1}^{g}\log(1+\lambda'(\theta_0)\omega_i), \quad (2.1)$$

其中 $\lambda(\theta_0)\in R^k$,且满足方程

$$\frac{t}{g}\sum_{j=1}^{g}\frac{\omega_j}{1+\lambda'(\theta_0)\omega_j}. \quad (2.2)$$

定理 1的证明 设 $X_i=(X_{i1},\cdots,X_{ik})'$, $i=1$,

$\cdots, n$, 记 $Z = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_i, S_1 = \sum_1^n Z_i Z_i', Z^{(n)} = \max_{1\le i\le n}\| Z_i\|$. 首先证明

$$Z^{(n)} = o_p(n^{1/2}). \qquad (2.3)$$

由条件(1)容易得到 $P(n^{1/2}Z^{(n)} > \varepsilon) = P((n^{1/2}\max_{1\le i\le n}\| X_i\| \,| G_n(X_i'\beta_0 - Y_i) - q)| > \varepsilon) \le \sum_1^n P(n^{-1/2}C\| X_i\| > \varepsilon) \le \frac{c}{n^2\varepsilon^4}\sum_{i=1}^n E\| X_i\|^4 \le \frac{c}{n\varepsilon^4}E\| X_1\|^4 \to 0$. 即(2.3)式成立. 再证

$$a'\bar Z = O_p(n^{-1/2}), \text{对任意的 } a\in R^k, \text{且 } a\ne 0, \qquad (2.4)$$

$$S_1 = A_0 + o_p(1). \qquad (2.5)$$

由于 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 是强平稳 ρ-混合的, 则 $a'Z_1, \cdots, a'Z_n$ 亦为强平稳 ρ-混合序列. 又 $E(a'Z_1) = 0$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(a'Z_1) = a'E(Z_1Z_{1+i}')a > 0$, 所以 $\sqrt{n}(a'\bar Z)$ 的方差 $B^2 = \frac{1}{n}E(\sum_1^n a'Z_i)^2 = a'(EZ_1Z_1' + 2\sum_1^{n-1}E(Z_1Z_{1+i}'))a > 0$. 从而可由引理 2 得 $\sup_i | P\{\frac{\sqrt{n}(a'\bar Z)}{B} < x\} - \Phi(x)| \to 0, n\to\infty$, 因此, (2.4)式成立.

由条件(4)知, $B^2 = a'(A_1 + o(1))a$, 因此

$$\sqrt{n}\,\bar Z \xrightarrow{d} N_k(0, A_1). \qquad (2.6)$$

令 $S_1 = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_iZ_i' \equiv (u_{lj}), l, j = 1, \cdots, k$. 要证(2.5)式只需证明 $E(u_{lj} - Eu_{lj})^2 \to 0, l, j = 1, 2, \cdots, k$. 由于 $u_{lj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \{G_n(X_i'(\beta_0 - Y_i) - q)\}^2 X_{il}X_{ij}$. 因此, 由引理 1 以及条件(1)和柯西-许瓦兹不等式, 有

$$E(u_{lj} - Eu_{lj})^2 = \frac{1}{n^2}E[\sum_{i=1}^n \{G_n(X_i'(\beta_0 - Y_i) - q)\}^2 X_{il}X_{ij} - E(G_n(X_i'\beta_0 - Y_i) - q)^2 X_{il}X_{ij}\}]^2 \le C\frac{1}{n^2}n^{2/2}\sup_i E\{(G_n(X_i'\beta_0 - Y_i) - q)^2 X_{il}X_{ij} - E(G_n(X_i'\beta_0 - Y_i) - q)^2 X_{il}X_{ij}\}^2 \le C\frac{1}{n}\sup_i E[G_n(X_i'\beta_0 - Y_i) - q\}^2 X_{il}X_{ij}]^2 \le C\frac{1}{n}(EX_{il}^4 EX_{1j}^4)^{1/2} \to 0.$$

所以 $S_1 = ES_1 + o_p(1)$. 由于 $ES_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[Z_iZ_i'] = E(Z_1Z_1')$, 因此由引理 3 知, (2.5)式成立.

综合(2.3)式到(2.6)式, 类似 Owen[5] 的定理 1 的证明, 可得 $\lambda_1(\beta_0) = n\bar Z'(S_1)^{-1}\bar Z + o_p(1)$. 再由(2.5)式和(2.6)式知, 定理 1 成立.

定理 2 若条件(1)、(2)、(5)、(6)成立, 则 $\iota(\beta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_{(k)}, n\to\infty$.

证明 记 $\bar\xi = \frac{1}{g}\sum_1^g \xi_j, S = \frac{t}{g}\sum_1^g \xi_j\xi_j', \xi = \max_{1\le j\le g}\| \xi_j\|$. 首先, 证明下面结果:

$$\xi = o_p(\sqrt{g/t}), \qquad (2.7)$$

$$a'\bar\xi = O_p((gt)^{-1/2}), a\in R^k, \qquad (2.8)$$

$$S = A + o_p(1), \qquad (2.9)$$

$$\sqrt{gt}\,\bar\xi \xrightarrow{d} N_k(0, A). \qquad (2.10)$$

注意到 $\bar\xi = \frac{1}{gt}\sum_{i=1}^{gt} Z_i = \bar Z$, 因此, 类似定理 1 的证明, 可得(2.8)式、(2.10)式成立, 从而, 只需证明(2.7)式、(2.9)式. 先证明(2.7)式. 利用引理 1 及 $(\sum_{i=1}^k a_i)^2 \le C\sum_{i=1}^k a_i^2$ 对任意的 $a_1, \cdots, a_k \in R$ 成立, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由条件(1)及引理 1 有

$$P\{(\sqrt{t}/\sqrt{g})\max_{1\le i\le g}\| \xi_i\| > \varepsilon\} \le C\frac{t^2}{g^2\varepsilon^4}\sum_1^g E\| \xi_i\|^4 \le C\frac{t^2}{g^2}\sum_1^g E\| \xi_i\|^4 = C\frac{1}{(gt)^2}\sum_{i=1}^g E\Big\|\sum_{j=1}^h Z_{(i-1)t+j}\Big\|^4 = C\frac{1}{(gt)^2}\cdot \sum_{i=1}^g E\{\sum_{l=1}^k(\sum_{j=1}^t Z_{(i-1)t+j,l})^2\}^2 \le C\frac{1}{(gt)^2}\cdot \sum_{i=1}^g\{k^{2/2}\sup_{1\le l\le k}E(\sum_{j=1}^t Z_{i,l})^4\} \le Ck\frac{1}{(gt)^2}\cdot \sum_{i=1}^g \sup_{1\le l\le k}t^{4/2}\sup_{1\le j\le t}EZ_{j,l}^4 \le Ck\frac{1}{g}E\| X_1\|^4 \to 0,$$

所以, (2.7)式成立.

再证(2.9)式. 由于 $S - ES = \frac{t}{g}\sum_{i=1}^g\{\xi_i\xi_i' - E(\xi_i\xi_i')\}$, 不妨设 $\xi_i = (\xi_{il}, \cdots, \xi_{ik})', i = 1, \cdots, g$. 由引理 1, 易得

$$E\{(S - ES)_{fl}\}^2 = \frac{t^2}{g^2}E\{\sum_{i=1}^g(\xi_{i,f}\xi_{i,l} - E(\xi_{i,f}\xi_{i,l}))^2 \le C\frac{t^2}{g^2}g^{2/2}\sup_{1\le i\le g}E(\xi_{i,f}\xi_{i,l} - E(\xi_{i,f}\xi_{i,l})\}^2 \le C\frac{t^2}{g}\sup_{1\le i\le g}E(\xi_{i,f}\xi_{i,l})^2 = C\frac{t^2}{g}\sup_{1\le i\le g}\sqrt{E(\frac{1}{t}\sum_{j=1}^t Z_{j,f})^4 E(\frac{1}{t}\sum_{j=1}^t Z_{j,l})^4} \le C\frac{1}{gt^2}\sqrt{(t^{4/2}EX_{1,f}^4)(t^{4/2}EX_{1,l}^4)} \le C\frac{1}{g}\sqrt{EX_{1,f}^4 EX_{1,l}^4} \to 0 (f, l = 1, \cdots, k).$$

因此 $S = ES + o_p(1)$, 而又因为 $ES = A + o(1)$, 即(2.9)得证.

记 $\lambda = \lambda(U_0) = d\theta, d \geq 0, \|\theta\| = 1$.由(2.2)式,类似 Owen[5]的定理 1的证明,有

$$0 \geq \frac{d\theta' S\theta}{1+ da} - \frac{t}{g}\left|\sum_{j=1}^{k} f_j \sum_{l=1}^{g} a_l\right|, \quad (2.11)$$

其中 f_j 第 j 坐标为 1其余为 0的单位向量.由(2.8)式知,(2.11)式中第二项是 $O_p((t/g)^{1/2})$,而且 $\theta' S\theta \geq \min \operatorname{eig}(S) + o_p(1)$, 即 $\frac{d}{1+da} = O_p((t/g)^{1/2})$.由(2.7)式得 $d = O_p((t/g)^{1/2})$,所以

$$\|\lambda\| = O_p((t/g)^{1/2}). \quad (2.12)$$

令 $V_i = \lambda' a_i, i = 1,\cdots,g$则

$$\max_{1\leq i\leq g}|V_i| = O_p((t/g)^{1/2})O_p((g/t)^{1/2}) = o_p(1). \quad (2.13)$$

由(2.2)式得

$$0 = \bar{t a} - S\lambda + \frac{t}{g}\sum_{i=1}^{g} a_i V_i^2/(1+ V_i). \quad (2.14)$$

由于(2.14)式的最后一项的模有界,则 $\frac{t}{g}\sum_{i=1}^{g}\|a_i\|^3\|\lambda\|^2|1+V_i|^{-1} = o_p((g/t)^{1/2}O_p(t/g)) = o_p(\sqrt{t/g})$,因此,可记 $\lambda = S^{-1}\bar{t a} + f$,其中 $\|f\| = o_p(\sqrt{t/g})$.由(2.13)式,展开得 $\log(1+V_i) = \gamma_i - \gamma_i^2/2 + \eta_i$.对某个有限的数 $B > 0, P(|Z_i| \leq B|V_i|^3, 1\leq i\leq g) \to 1$,当 $n \to \infty$.因此

$$\lambda(U_0) = 2\sum_{i=1}^{g}\log(1+V_i) = 2\sum_{i=1}^{g}V_i - \sum_{i=1}^{g}V_i^2 + 2\sum_{i=1}^{g}Z_i = 2g\lambda'\bar{a} - \frac{g}{t}\lambda' S\lambda + 2\sum_{i=1}^{g}Z_i = 2gt\bar{a}'S^{-1}\bar{a} + 2gf'\bar{a} - gt\bar{a}'S^{-1}\bar{a} - \frac{g}{t}f'Sf - 2gf'\bar{a} + 2\sum_{1}^{g}Z_i = gt\bar{a}'S^{-1}\bar{a} - \frac{g}{t}f'Sf + 2\sum_{i=1}^{g}Z_i.$$

由于 $(g/t)f'Sf = o_p(1)$, $\left|\sum_{1}^{g}Z_i\right| \leq B\|\lambda\|^3 \cdot \sum_{1}^{g}\|a_i\|^3 = BO_p((t/g)^{3/2})\frac{g}{t}o_p(\sqrt{g/t}) = o_p(1)$,因此,再由(2.9)式、(2.10)式,定理 2证明完毕.

由定理 2可以构造 U_0的经验似然置信区域 $I_c = \{U_0: 1(U_0) \leq C_T\}$,

其中 C_T是自由度为 k的 i^2分布的上 T分位数(T= 0.05或 T= 0.01).

3 模拟分析

模拟回归方程 $Y = XU + U$中回归系数 U的置信区间的覆盖概率,其中 U服从:(1)标准正态分布,(2)均匀分布,且满足 $P(U\leq 0|X_i) = 0.5$.X为 m-相依样本(由于 m-相依是特殊的 O混合,为方便计算,故只考虑 m-相依情形),样本容量 $n = 30, 50$.取 $m = 5$,U的真值为 1,T= 0.05.样本 $X_1,\cdots,X_n$取法:产生 $n+m$个独立同分布的标准正态随机数 $T_1,\cdots,T_{n+m}$,则可以认为 $X_i = \sum_{j=i}^{i+m-1}T_j(1\leq i\leq n)$强平稳 m-相依样本.取核函数 $K(u) = 3/4(1-u^2)I(|u|\leq 1)$, $h = n^{-0.8}$.每次试验在同样的条件下重复 500次.分别用 LAD和 SEL表示 Whang Yoo-Jae[7]列出的方法(即非光滑 LAD方法)和本文方法,结果见表 1.

表 1 回归系数置信区间估计的覆盖概率

Table 1 Covergent probability of regression coefficient

样本容量 n Sample size n	U服从标准正态分布 U is from standard normal distribution		U服从均匀分布 U is from uniform distribution	
	LAD	SEL	LAD	SEL
30	0.846	0.879	0.841	0.868
50	0.905	0.921	0.899	0.911
60	0.936	0.948	0.921	0.932

由表 1的模拟结果可以看出:(1)在相同误差分布情况下,随样本容量的增加,置信区间得覆盖概率逐渐增加;(2)在上述两种情况下,本文所得的结论均优于 LAD方法的结果.

参考文献:

[1] Koenker R, Bassett G. Regression quantiles[J]. Econometrica, 1978, 46: 33-50.
[2] Koenker R, Bassett G. Robust tests for heteroskedasticity based on regression quantiles[J]. Econometrica, 1982, 50: 43-61.
[3] 吴建南,马伟.估计极端行为模型:分位数回归方法及其实现与应用[J].数理统计与管理, 2006, 25: 536-543.
[4] Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional[J]. Biometrika, 1988, 75: 237-249.
[5] Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence regions[J]. Annals of Statistics, 1990, 18: 90-120.
[6] Chen S X, Hall P. Smoothed empirical likelihood confidence intervals for quantiles[J]. Annals of Statistics, 1993, 21: 1166-1181.
[7] Whang Yoon-Jae. Smoothed empirical likelihood methods for quantile regression models[J]. Econometric Theory, 2006, 22: 173-205.
[8] 林正炎.相依样本情形时的核估计[J].科学通报, 1983, 12: 709-713.
[9] 刘京军,陈平炎,甘师信. O混合序列的大数定律[J].数学杂志, 1998, 18: 91-95.
[10] Samour J D. Convergence of mixing triangular arrays of random vectors with stationary rows[J]. Ann Probability, 1984, 12: 390-426.

(责任编辑:尹 闯)