DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.012
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 41~ 45

不等式约束多元线性模型中线性预测的可容许性*

Admissibility of Linear Predictor in the Multivariate Linear Models with Respect to Inequality Constraints

周志龙,朱 宁,方爱秋
ZHOU Zhi-long, ZHU Ning, FANG Ai-qiu

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 在两个不同的不等式约束下,给出多元线性模型中非齐次线性预测的可容许与齐次线性预测可容许性之间的关系.

关键词: 可容许性 线性预测 不等式约束 多元线性模型
中图法分类号: O212.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0041-05

Abstract The relationship between homogeneous and inhomogeneous admissible linear predictor in the multivariate linear models with respect to two different inequality constraints is obtained.

Key words admissibility, linear predictor, inequality constraints, multivariate linear models

当模型参数不受约束时,文献[1~6]对有限总体中总体总量和回归系数等的最优预测问题作了系统的研究,先后得到贝叶斯预测,极小、极大预测,稳健线性预测,最优线性无偏预测和简单投影预测等,但在实际问题中,模型的参数往往受某些条件的约束.文献[7]研究参数受到线性等式约束时线性预测问题.文献[8]研究不等式约束下多元线性模型中线性估计的可容许性.文献[9]研究不等式约束下线性预测的可容许性问题.文献[9]中的约束条件是文献[8]中的一种特殊情况.本文在文献[8]的约束条件

$$T=\{(B,U)\mid B\in C=\{B: \mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0, \forall \setminus \exists\ i=1,2,\cdots,d\}, U\in v\} \quad (1)$$

(其中 R_i 是 $q\times p$ 的已知矩阵,v 为 $p\times p$ 阶对称非负定阵组成的集合)下,讨论多元线性模型线性预测的可容许性问题,推广了相关文献的结论.

文中 $\_(A)$, A^-, A^+, A', $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{rk}(A)$ 分别表示矩阵 A 的列空间,g 逆, Moore-Penrose广义逆,转置,迹和秩,$A\geqslant 0$ 表示 A 对称非负定阵,$A\geqslant B$ 表示 $A-B\geqslant 0$.

1 基本概念

考虑多元线性模型

$$\begin{cases} Y= XB+ X, \\ E(\mathrm{Vec}(X))=0, \\ \mathrm{Var}(\mathrm{Vec}(X))= U\otimes V, \end{cases} \quad (2)$$

其中 Y 为 $n\times p$ 阶可观测随机矩阵,X 是已知阶为 $n\times q$ 的设计矩阵,V 是 $n\times n$ 阶对称非负定矩阵,X为 $n\times p$ 阶的随机误差矩阵,$\otimes$ 表示 Kronecker乘积,$\mathrm{Vec}(X)$ 表示按 X 的列拉直得到的列向量.未知参数 $(B,U)\in T=\{T\mid R^{q\times p}\times v\}$,其中 $R^{q\times p}$ 是所有 $q\times p$ 阶矩阵所组成的集合,v 为 $p\times p$ 阶对称非负定阵组成的集合.

模型(2)的预测问题就是要利用已知观察矩阵 Y 来预测未知观测阵 Y_0,其模型为

$$\begin{cases} Y_0= X_0B+ X_0, \\ E(\mathrm{Vec}(X_0))=0, \\ \mathrm{Var}(\mathrm{Vec}(X_0))= U\otimes V_0, \\ \mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(X)\mathrm{Vec}(X_0))= U\otimes \Sigma, \end{cases} \quad (3)$$

其中 X_0 和 Σ 分别为 $m\times q$ 和 $n\times m$ 阶已知矩阵,V_0 为 m 阶已知对称非负定阵,X_0 为 $m\times p$ 阶随机误差距阵.

要想预测变量 SY_0,其中 S 是 $s\times m$ 阶已知矩

收稿日期: 2008-06-12
作者简介: 周志龙(1980-),男,硕士,主要从事多元统计分析及其应用方面的研究.

阵.这里考虑两类线性预测,即非齐次线性预测和齐次线性预测,分别为 $\iota I=\{AY+A_0$ ∶ A为 $s\times n$阶矩阵,A_0为 $s\times p$阶矩阵$\}$,$\iota H=\{AY$ ∶ A为 $s\times n$阶矩阵$\}$.选取二次损失函数 $L(d(Y),SY_0)=\mathrm{tr}(d(Y)-SY_0)'(d(Y)-SY_0)$,其中 $d(Y)$是 SY_0的预测.则相应的风险函数为 $R(d(Y),SY_0)=\mathrm{tr}E(d(Y)-SY_0)'(d(Y)-SY_0)$.

定义 **1** 对于线性模型(2),称 SY_0条件线性可预测变量,如果存在 $s\times n$阶已知矩阵 A,使得对任意$(B,U)\in T$,有 $E(AY-SY_0)=0$.

定义 **2** 设 $d_1(Y)$和 $d_2(Y)$是 SY_0的两个预测,如果在条件(1)式下,有 $R(d_1(Y),SY_0)\leqslant R(d_2(Y),SY_0)$且存在某个$(B_0,U_0)\in T$使得不等号严格成立,则称 $d_1(Y)$一致优于 $d_2(Y)$.设 ι为 SY_0的某个预测类,$d(Y)\in\iota$,如果在 ι中不存在一致优于 $d(Y)$的预测,则称 $d(Y)$是 SY_0的在 ι中可容许预测,记为 $d(Y)\overset{\iota}{\sim}SY_0(T)$.

2 主要结果

2.1 不等式约束 $C=\{B$ ∶ $\mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0,\forall i=1,2,\cdots,d,d>1\}$下的结果

记 $T=\{(B,U)$ ∶ $B\in C,U\in v\}$,$T_1=\{(B,U)$ ∶ $B\in C,U\in v_1\}$,其中 v是所有 $p\times p$阶对称非负定阵组成的集合,v_1是 $p\times p$阶对称非负定阵组成的锥集,$C=\{B$ ∶ $\mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0,\forall i=1,2,\cdots,d,d>1\}$,$C^*=\{\Gamma$ ∶ $\mathrm{tr}\Gamma'B\leqslant 0,\forall B\in C\}$.

定理 **1** 对多元线性模型$(Y,XB,U|(B,U)\in T)$,如果 $AY+A_0\overset{\iota I}{\sim}SY_0(T)^*$,则(i) _ $(A_0)\subseteq$ _ $(AX-SX_0)$,(ii)对所有 $\Gamma\in C^*$,_ $(\Gamma)\subseteq$ _ $((AX-SX_0)')$,有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)\geqslant 0$.

证明 (i)假设 _ $(A_0)\subseteq$ _ $(AX-SX_0)$不成立.令 $A_0=A_{01}+A_{02}$,其中 _ $(A_{01})\subseteq$ _ $(AX-SX_0)$,_ $(A_{02})\subseteq$ _$^{\perp}(AX-SX_0)$,且 $A_{02}\neq 0$.则 $\mathrm{tr}A_0'A_0=\mathrm{tr}A_{01}'A_{01}+\mathrm{tr}A_{02}'A_{02}$,对所有$(B,U)\in T$,有 $R(AY+A_0,SY_0)-R(AY+A_{01},SY_0)=\mathrm{tr}A_{01}'A_{01}+\mathrm{tr}A_{02}'A_{02}>0$,则 $R(AY+A_{01},SY_0)$优于 $R(AY+A_0,SY_0)$,这与已知条件有矛盾.故假设不成立,所以 _ $(A_0)\subseteq$ _ $(AX-SX_0)$.

(ii)对所有 $\Gamma\in C^*$,_ $(\Gamma)\subseteq$ _ $((AX-SX_0)')$,那么 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)\geqslant 0$不成立.不妨设 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)<0$,因为 _ $(\Gamma)\subseteq$ _ $((AX-SX_0)')$,则存在 Γ_0,使得 $\Gamma=(AX-SX_0)'\Gamma_0$.令 $\Theta_0=A_0+\lambda\Gamma_0(\lambda>0)$对所有$(B,U)\in T$,有

$$R(AY+\Theta_0,SY_0)-R(AY+A_0,SY_0)=2\lambda\mathrm{tr}(A_0'(AX-SX_0)^+\Gamma)+2\lambda\mathrm{tr}B'\Gamma+\lambda^2\mathrm{tr}\Gamma_0'\Gamma_0.\tag{4}$$

在(4)式中,当 λ充分小时,对所有$(B,U)\in T$,有 $R(AY+\Theta_0,SY_0)-R(AY+A_0,SY_0)<0$.由此可知,$R(AY+\Theta_0,SY_0)$优于 $R(AY+A_0,SY_0)$,这与已知条件有矛盾,则假设不成立.所以对所有 $\Gamma\in C^*$,_ $(\Gamma\subseteq$ _ $((AX-SX_0)')$,有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)\geqslant 0$.

定理 **2** 考虑多元线性模型$(Y,XB,U|(B,U)\in T)$.设 _ $((AX-SX_0)')\subseteq$ _$^{\perp}(R)$,或者 _ $((AX-SX_0)^+)\subseteq$ _$^{\perp}(R)$,如果 $AY+A_0\overset{\iota I}{\sim}SY_0(T)$,则 $AY\overset{\iota H}{\sim}SY_0(T)$,其中 $R=(R_1,R_2,\cdots,R_d)$.

证明 考虑 _ $((AX-SX_0)')\subseteq$ _$^{\perp}(R)$的情况,其它情况类似.若存在 L,使得 LY优于 AY,则对所有$(B,U)\in T$,有 $R(LY,SY_0)\leqslant R(AY,SY_0)$,即 $\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U$.因为 $C=\{B$ ∶ $\mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0,\forall i=1,2,\cdots,d,d>1\}$是个锥集,则对所有 $\lambda>0$和 $B\in C$,有 $\lambda B\in C$.此时用 λB代替上式中的 B,有 $\lambda^2\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\lambda^2\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U$.当 λ分别趋于 0和趋于无穷时,有 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\leqslant\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)$,$\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B\leqslant\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B$.由定理 1(i)知,$\exists A_1$使得 $A_0=(AX-SX_0)(AX-SX_0)'A_1$.又因为 _ $((AX-SX_0)')\subseteq$ _$^{\perp}(R)$,则 $B+(AX-SX_0)'A_1\in C$.此时对所有$(B,U)\in T$,有

$$\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)[B+(AX-SX_0)'A_1]+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)[B+(AX-SX_0)'A_1]+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U.\tag{5}$$

则对所有$(B,U)\in T$,有

$$R(LY+(LX-SX_0)(LX-SX_0)'A_1,SY_0)\leqslant R(AY+A_0,SY_0).\tag{6}$$

因为 $AY+A_0\overset{\iota I}{\sim}SY_0(T)$,所以(6)式成立.这就意味着对$(B,U)\in T$,(5)式成立.不妨令 $B=-(AX-SX_0)'A_1$,此时有

$\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)=\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)$,

$\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(LX-SX_0)'(LX-$

$SY_0)[B+(AX-SX_0)'A_1]=\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(AX-SY_0)'(AX-SX_0)[B+(AX-SX_0)'A_1],\forall B\in C.$ (7)

因为 C 是个锥集，如果 $(B,U)\in T$，则对所有的 $\lambda>0$，都有 $(\lambda B,U)\in T$。用 λB 代替 (7) 式中的 B，(7) 式仍然成立。故对所有 $(B,U)\in T$，有 $R(LY,SY_0)=\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U=\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U=R(AY,SY_0)$。这说明对 $\forall(B,U)\in T$ 在 LH 估计类中不存在一致优于 AY 的齐次线性预测。故 $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)$。

定理 3 考虑多元线性模型 $(Y,XB,U|(B,U)\in T)$。设 $\mathcal{M}((AX-SX_0)')\subseteq\mathcal{M}^{\perp}(R)$ 或者 $\mathcal{M}((AX-SX_0)^{+})\subseteq\mathcal{M}^{\perp}(R)$，如果 $AY+A_0\overset{LI}{\sim}SY_0(T)$，则 (i) $\mathcal{M}(A_0)\subseteq\mathcal{M}(AX-SX_0)$，(ii) 对所有 $\Gamma\in C^*$，$\mathcal{M}(\Gamma)\subseteq\mathcal{M}((AX-SX_0)')$，有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^{+}A_0)\geqslant 0$，(iii) $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)$，其中 $R=(R_1,R_2,\cdots,R_d)$。

2.2 不等式约束 $C=\{B:\mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0,\exists i=1,2,\cdots,d,d\geqslant 1\}$ 下的结果

记 $T=\{(B,U):B\in C,U\in v\}$ 和 $T_1=\{(B,U):B\in C,U\in v_1\}$，其中 v 是所有 $p\times p$ 阶对称非负定阵组成的集合，v_1 是 $p\times p$ 阶对称非负定阵组成的锥集，$C=\{B:\mathrm{tr}R_i'B\geqslant 0,\exists i=1,2,\cdots,d,d\geqslant 1\}$，$C^*=\{\Gamma:\mathrm{tr}\Gamma'B\leqslant 0,\forall B\in C\}$。

引理 1[8] 设 C 是由 $R^{q\times p}$ 矩阵组成的集合，对任意 $q\times p$ 阶矩阵 Γ 和任意实数 τ，

$\mathrm{tr}\Gamma'B+\tau\leqslant 0,\forall B\in C,\Leftrightarrow\Gamma\in C^*,\tau\leqslant 0$，其中 $C^*=\{\Gamma:\mathrm{tr}\Gamma'B\leqslant 0,\forall B\in C\}$。

引理 2[8] 对于任意矩阵 L,A 和任意实数 τ_1,τ_2，如果 $\mathrm{tr}B'AB+\tau_1\leqslant\mathrm{tr}B'LB+\tau_2(B\in C)$，则 $L-A\geqslant 0,\tau_1\leqslant\tau_2$。

引理 3[8] 在多元线性模型 $(Y,XB,U|(B,U)\in T)$ 和风险函数 $R(AY,SB)=\mathrm{tr}E(AY-SB)'(AY-SB)$ 下，设 SB 线性可估，则 $AY\overset{LH}{\sim}SB(T)$ 的充要条件是 (i) $AV=AX(X'D^{+}X)^{-}X'D^{+}V$，(ii) $AX[(X'D^{+}X)^{-}-I]S'\geqslant AX[(X'D^{+}X)^{-}-I]X'A$，(iii) $rk(AX-S)(X'D^{+}X-I)X'=rk(AX-S)$，其中 $D=V+XX'$。

定理 4 对多元线性模型 $(Y,XB,U|(B,U)\in T)$，有 $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)\Leftrightarrow AY\overset{LH}{\sim}SY_0(R^{q\times p}\times v)$。

定理 5 对多元线性模型 $(Y,XB,U|(B,U)\in T)$，设 SY_0 是条件可预测，则 $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)$ 的充要条件是 (i) $A[I-X(X'D^{+}X)^{-}X'D^{+}]V=S\Sigma'V^{+}[I-X(X'D^{+}X)^{-}X'D^{+}]V$，(ii) $(A-S\Sigma'V^{+})\cdot X[(X'D^{+}X)^{-}-I](SX_0-S\Sigma'V^{+}X)\geqslant(A-S\Sigma'V^{+})X[(X'D^{+}X)^{-}-I]X'(A-S\Sigma'V^{+})$，(iii) $rk(AX-SX_0)(X'D^{+}X-I)X'=rk(AX-SX_0)$，其中 $D=V+XX'$。

证明 由文献 [5] 知，$\mathcal{M}(\Sigma)\subseteq\mathcal{M}(V)$，于是 $\Sigma'V^{+}V=\Sigma'$。易知 $R(AY,SY_0)=\mathrm{tr}U\cdot\mathrm{tr}(SV_0S-S\Sigma'V^{+}\Sigma S)+\mathrm{tr}E\{[(A-S\Sigma'V^{+})Y-(SX_0-S\Sigma'V^{+}X)B]'[(A-S\Sigma'V^{+})Y-(SX_0-S\Sigma'V^{+}X)B]\}$。由于 $\mathrm{tr}U\cdot\mathrm{tr}(SV_0S-S\Sigma'V^{+}\Sigma S)$ 是常数，则 $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)\Leftrightarrow A-S\Sigma'V^{+})Y\overset{LH}{\sim}(SX_0-S\Sigma'V^{+}X)B$。再由引理 3 可知，定理 5 成立。

定理 6 考虑多元线性模型 $(Y,XB,U|(U,B)\in T)$，如果 $AY+A_0\overset{LI}{\sim}SY_0(T)$，则 (i) $\mathcal{M}(A_0)\subseteq\mathcal{M}(AX-SX_0)$，(ii) 对所有 $\Gamma\in C^*$ $\mathcal{M}(\Gamma)\subseteq\mathcal{M}((AX-SX_0)')$，有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^{+}A_0)\geqslant 0$，(iii) $AY\overset{LH}{\sim}SY_0(T)$。

证明 (i)，(ii) 可由定理 1 直接得到。下面证明 (iii) 成立。

由 (i) 可知，存在 A_1 使得 $A_0=(AX-SX_0)(AX-SX_0)'A_1$。假设 LY 优于 AY，则对所有的 $(B,U)\in T$，有 $R(LY,SY_0)\leqslant R(AY,SY_0)$，即 $\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U$。由引理 2 可知，$\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U$，$(AX-SX_0)'(AX-SX_0)-(LX-SX_0)'(LX-SX_0)\geqslant 0$，因此，对所有的 $(B,U)\in T$，有

$$\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)[B+(AX-SX_0)'A_1]+\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\mathrm{tr}U\leqslant\mathrm{tr}[B+(AX-SX_0)'A_1]'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)[B+(AX-SX_0)'A_1]+\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)\mathrm{tr}U,\quad(8)$$

那么

$$R(LY+(AX-SX_0)(AX-SX_0)'A_1,SY_0)\leqslant R(AY+A_0,SY_0).\quad(9)$$

因为 $AY+A_0\overset{LI}{\sim}SY_0(T)$，所以 (9) 式成立。这意味着对 $(B,U)\in T$，即 (8) 式成立。C 是一个锥集，当 $(B,U)\in T$ 时，对所有 $\lambda>0$，必有 $(\lambda B,U)\in T$。若 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)\neq\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)$，则 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)<\mathrm{tr}(A'AV-2A'S\Sigma)$，此时 (9) 式不成立。若 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'S\Sigma)=\mathrm{tr}(A'AV-$

$2A'\Sigma)$, 那么 $\exists B_0$, 有 $\mathrm{tr}B_0'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B_0<\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}B_0'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B_0$. 用 λB_0 代替上式中的 B_0, 此时 (9) 式也不成立. 因此, 对所有 $(B,U)\in T$, 有 $R(LY,SY_0)=\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B+\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\mathrm{tr}U=\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B+\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}U=R(AY,SY_0)$.

这说明对 $\forall (B,U)\in T$ 在 $\mathcal{L}H$ 估计类中不存在一致优于 AY 的齐次线性预测. 故 $AY\overset{\mathcal{L}H}{\sim}SY_0(T)$.

定理 7 对多元线性模型 $(Y,XB,U\mid(B,U)\in T_1)$, 则 $AY+A_0\overset{d}{\sim}SY_0(T_1)$ 的充要条件是 (i) $\mathcal{M}(A_0)\subseteq\mathcal{M}(AX-SX_0)$, (ii) 对所有 $\Gamma\in C^*$, $\mathcal{M}(\Gamma)\subseteq\mathcal{M}((AX-SX_0)')$ 有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)\geqslant 0$, (iii) $AY\overset{\mathcal{L}H}{\sim}SY_0(T)$.

证明 由定理 6 知必要性显然成立, 下面证明充分性.

由定理 1(i) 知, 只需要证明不存在 L 和 L_1, 使得 $LY+(LX-SX_0)L_1$ 优于 $AY+(AX-SX_0)A_1$, 其中 $A_0=(AX-SX_0)A_1$. 假设 $LY+(LX-SX_0)L_1$ 优于 $AY+(AX-SX_0)A_1$, 则 $(B,U)\in C\times v_1=T_1$ 有

$$R(LY+(LY-SX_0)L_1,SY_0)\leqslant R(AY+(AX-SX_0)A_1,SY_0),\qquad(10)$$

那么

$$\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}(B+L_1)'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)(B+L_1)\leqslant\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}(B+A_1)'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)(B+A_1).\qquad(11)$$

由于 v_1 是锥集, 则对所有 $U\in v_1$, 有 $\lambda U\in v_1$, 用 λU 代替 (11) 式中的 U, (11) 式也成立, 即

$$\lambda\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}(B+L_1)'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)(B+L_1)\leqslant\lambda\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}(B+A_1)'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)(B+A_1).\qquad(12)$$

当 $\lambda\to 0$ 和 $\lambda\to+\infty$ 时, 对 (12) 式两边取极限分别得到

$$\mathrm{tr}(B+L_1)'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)(B+L_1)\leqslant\mathrm{tr}(B+A_1)'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)(B+A_1),\qquad(13)$$

$$\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\leqslant\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma).$$

同理易知 $\lambda B\in C$, 用 λB 代替 (13) 式中的 B. 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 有 $\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B\leqslant\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B$. 此时对所有 $(B,U)\in T_1$, 有 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B\leqslant\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B$. 因为 $AY\overset{\mathcal{L}H}{\sim}SY_0(T_1)$, 则 $\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B=\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma)\mathrm{tr}U+\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B$. 同理, 对 $(B,U)\in T_1$ 有

$$\mathrm{tr}(L'LV-2L'\Sigma)=\mathrm{tr}(A'AV-2A'\Sigma),\quad \mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B=\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AY-SX_0)B.\qquad(14)$$

对 $\forall B\in\tilde{C}=\{B:-B\in C\}$ 结论仍然成立, 即 $\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B=\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B$. 则对任意 $\forall B\in C\cup\tilde{C}=R^{q\times p}$, 有

$$\mathrm{tr}B'(LX-SX_0)'(LX-SX_0)B=\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)B.\qquad(15)$$

类似定理 3 的证明, 有

$$(LX-SX_0)'(LX-SX_0)=(AX-SX_0)'(AX-SX_0).\qquad(16)$$

由 (11) 式, (14) 式和 (16) 式, 对 $\forall B\in C$, 有 $2\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)L_1+\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)L_1\leqslant 2\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)A_1+\mathrm{tr}A_1'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)A_1$, 即 $2\mathrm{tr}B'(AX-SX_0)'(AY-SX_0)[L_1-(AX-SX_0)^+A_0]+\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)L_1-\mathrm{tr}A_0'A_0\leqslant 0$. 由引理 1 知

$$\mathrm{tr}A_0'A_0-\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)L_1\geqslant 0,\qquad(17)$$

$$(AX-SX_0)'(AY-SX_0)[L_1-(AX-SX_0)^+A_0]\in C^*.\qquad(18)$$

由条件 (ii) 可知 $\mathrm{tr}[L_1-(AX-SX_0)^+A_0]'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)(AX-SX_0)^+A_0=\mathrm{tr}[L_1-(AX-SX_0)^+A_0]'(AX-SX_0)'A_0\geqslant 0$, 则

$$\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'A_0\geqslant\mathrm{tr}A_0'A.\qquad(19)$$

由 (17) 式和 (18) 可知 $\mathrm{tr}[(AX-SX_0)A_1-(AX-SX_0)L_1]'[(AX-SX_0)A_1-(AX-SX_0)L_1]=\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'(AX-SX_0)L_1-2\mathrm{tr}L_1'(AX-SX_0)'A_0+\mathrm{tr}A_0'A_0=Vec'[(AX-SX_0)(A_1-L_1)]Vec[(AX-SX_0)(A_1-L_1)]\geqslant 0$, 因此有 $\mathrm{tr}[(AX-SX_0)A_1-(AX-SX_0)L_1]'[(AX-SX_0)A_1-(AX-SX_0)L_1]=0$, 则 $(AX-SX_0)A_1=(AX-SX_0)L_1$, 由此就得到 (11) 式, 则 (10) 式显然成立.

这就说明不存在优于 $AY+A_0$ 的非齐次线性预测,故 $AY+A_0 \overset{LH}{\sim} SY_0(T)$.

推论 1 考虑多元线性模型 $(Y, XB, U| (B,U)\in T)$.设 SY_0 是条件可预测,则 $AY+A_0 \overset{LI}{\sim} SY_0(T)$ 的充要条件是 (i) $\mathcal{M}(A_0)\subseteq \mathcal{M}(AX-SX_0)$, (ii) 对所有 $\Gamma\in C^*$, $\mathcal{M}(\Gamma)\subseteq \mathcal{M}((AX-SX_0)')$,有 $\mathrm{tr}(\Gamma'(AX-SX_0)^+A_0)\geqslant 0$, (iii) $(A-S\Sigma'V^+)X[(X'D^+X)^- - I](SX_0 - S\Sigma'V^+X)' \geqslant (A-S\Sigma'V^+)X[(X'D^+X)^- - I]X'(A-S\Sigma'X^+)$, (iv) $rk(AX-SX_0)(X'D^+X-I)X' = rk(AX-SX_0)$,其中 $D=V+XX'$.

参考文献:

[1] Pereira C A B, Rodrigues J. Robust linear prediction in finite populations [J]. International Statistical Review, 1983, 51: 293-300.

[2] Bolfarine H, Pereira C A B, Rodrigues J. Robust linear predictionin finite populations-A bayesian perspective[J]. Sankhya Series B, 1987, 49: 23-25.

[3] Bolfarine H, Rodrigues J. On the simple prediction in finite populations[J]. Aust Jour Statist, 1988, 30: 338-341.

[4] Bolfarine H, Zacks S. Bayes and minimax prediction in finite populations [J]. Jour Statistical Planning and Inference, 1991, 28: 139-151.

[5] 喻胜华,何灿芝.任意秩多元线性模型中的最优预测 [J].应用数学学报, 2001, 24(1): 227-236.

[6] Bolfarine H, Zacks S, Elian S N, et al. Optimal prediction of finite populations regression cofficient[J]. Sankhya Series B, 1994, 56: 1-10.

[7] 袁权龙,王浩波.多元线性模型中条件最优预测的稳健性 [J].数学研究, 2005, 38(4): 434-439.

[8] Wu Jian-hong. Admissibility of linear estimators in multivariate linear models with respect to inequality constraints[J]. Linear Algebra and Its Applicantions, 2008, 428: 2040-2048.

[9] 何道江.不等式约束下线性预测的可容许性 [J].数学研究, 2007, 40(4): 425-431.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 40页 Continue from page 40)

Combining $q>\max\{2/T, 2\theta, 1/|T+W-1/2|\}$ and formula(11)~(13), we know the formula(10) is proved. So we complete the proof of Theorem 2.2.

Because $\tilde{\rho}$-mixing sequences are more general than NA sequences or ρ^*-mixing sequences. So we have the following two corollaries.

Corollary 2.1 Let $0<T\leqslant 1$, and $\{X_n; n\geqslant 1\}$ be a $\tilde{\rho}$-mixing or NA sequence of identically distributed random variables with $EX_1=0, E|X_1|^{2/T}<\infty$. And $|a_{ni}|\leqslant Cn^{-2/T-W}, n\geqslant 1, i\leqslant n$ and $0<W<T/2$, $|a_{ni}|=0, i>n$. And there exists a constant $\theta>0$ such that $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \leqslant Cn^{-\theta}$, for all n. Then $\hat{T}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \xrightarrow{a.s.} 0, n\to\infty$.

Corollary 2.2 Let $0<T\leqslant 1$, and $\{X_n; n\geqslant 1\}$ be a $\tilde{\rho}$-mixing or NA sequence of identically distributed random variables with $EX_1=0, E|X_1|^{2/T}<\infty$. And $|a_{ni}|\leqslant Cn^{-2/T-W}, n\geqslant 1, i\leqslant n$ and $0<W<T/2$, $|a_{ni}|=0, i>n$. And there exists a constant $\theta>0$ such that $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2\leqslant Cn^{-\theta}$, for all n, as $0<T\leqslant 1/2-W$. Then $\hat{T}_n=\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \xrightarrow{c} 0, n\to\infty$.

参考文献:

[1] Zhang L X, Wang X Y. Convergence rates in the strong laws of asymptotically negatively associated random fields[J]. Appl Math J Chinese Univ, 1999, 14(4): 406-416.

[2] Zhang L X. A functional central limit theorem for asymptotically negatively dependent random fields [J]. Acta Math Hungar, 2000, 86(3): 237-259.

[3] Zhang L X. Central limit theorems for asymptotically negatively associated random fields [J]. Acta Math Sinica, English Series, 2000, 16(4): 691-710.

[4] Stout W F. Almost sure convergence[M]. New York: Academic Press, 1974.

[5] Thrum R. A remark on almost sure convergence of weighted sums[J]. Probab Th Rel Fields, 1987, 75: 425-430.

[6] Joag Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications [J]. Ann Statist, 1983, 11: 268-295.

[7] Wang J F, LU F B. Inequalities of maximum of partial sums and weak convergence for a class of weak dependent random variables [J]. Acta Math Sinica, 2006, 22(3): 693-700.

(责任编辑: 尹 闯)