DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.009

广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 32~34

用 WZ方法证明 3个著名组合恒等式*

Proof of Three Famous Combinatorial Identities by WZ Method

黄均振

HUANG Jun-zhen

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)

(College of Mathematics Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用 WZ方法证明 Bailey$_4F_3$恒等式、Vandermonde恒等式和李善兰恒等式成立.

关键词: Gamma函数 超几何级数 组合恒等式 WZ方法

中图法分类号: O189, O177 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0032-03

Abstract The Bailey$_4F_3$ identity, Vandermonde identity and Li-shanlan identity have been proved by WZ method.

Key words Gamma function, hypergeometric series, combinatorial identity, WZ method

在组合数学中,组合恒等式的证明是一个很重要的内容,又由于它具有相当的复杂性,其证明方法也多种多样.证明组合恒等式,常用的方法有组合分析法和生成函数法.有些组合恒等式还可以利用集合论的观点、求导法则和概率法加以论证.文献[1]给出 Bailey$_4F_3$恒等式的超几何变换证明.文献[2,3]分别用概率法和幂级数法证明了李善兰恒等式.上述这些方法均可以用来证明 Vandermonde恒等式成立.

1990年,Wilf和 Zeilberger在 Gosper算法[4]的基础上发明了 WZ方法[1,5,6],并因此荣获了 Steele奖.这种方法在证明超几何恒等式[1,7,8](很多组合恒等式也可以用超几何级数来表示)方面功能强大[6].本文利用 WZ方法对 Bailey$_4F_3$恒等式、Vandermonde恒等式和李善兰恒等式进行证明.文中用到的定义及符号参见文献[1,5,9],其中 Z, C 分别代表整数域和复数域.

1 预备知识

1.1 定义与记号

定义 1[1,7,8] 形如$\sum_k t_k$的级数称为超几何级数,如果相邻两项

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{P(k)}{Q(k)}, P, Q\in C(k), C(k)\neq 0, \quad (1.1)$$

是关于 k的有理多项式.不失一般性,我们假定

$$t_0=1. \quad (1.2)$$

定义 2[1,9] Gamma函数

$$\Gamma(z):=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}, z\in C. \quad (1.3)$$

定义 3[1,8] 阶乘(Pochhammer符号)

$$(a)_n:=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, n\in Z, a\in C. \quad (1.4)$$

对参数 $a_1, a_2, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_q\in C$,有记号:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \cdots, a_p\\ b_1, b_2, \cdots, b_q\end{matrix}; z\right):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}. \quad (1.5)$$

显然(1.5)式满足

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)(k+1)}z, \quad (1.6)$$

收稿日期: 2008-06-24

作者简介: 黄均振(1983-),男,硕士研究生,主要从事特殊函数论的研究.

* 国家自然科学基金项目(10761002),广西自然科学基金项目(0728090),广西教育厅项目(200607MS136),广西研究生教育创新计划项目(200810602070lM236)资助.

即满足定义 1.

1.2 WZ方法及其相关引理

WZ方法是用来证明形如

$$\sum_{k=0}^{\infty} t(n,k) = s(n) \tag{1.7}$$

的超几何恒等式,其中 $t(n,k)$ 关于 n,k 为超几何的,$s(n)$ 关于 n 为超几何的. 当 $s(n)=0$ 时,(1.7) 式易证明;当 $s(n)\neq 0$,记

$$F(n,k) = t(n,k)/s(n). \tag{1.8}$$

那么转化为证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n,k) = 1. \tag{1.9}$$

WZ方法主要是要寻找一个有理函数 $R(n,k)$,此函数定义为

$$G(n,k) = R(n,k)F(n,k). \tag{1.10}$$

如果找到合适的 $R(n,k)$,则 WZ方程[1,5]

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{1.11}$$

成立. (1.11) 式两边对 k 从 0到 ∞ 求和,得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n+1,k) - \sum_{k=0}^{\infty} F(n,k) = \lim_{k\to\infty} G(n,k+1) - G(n,0). \tag{1.12}$$

如果 $G(n,0)$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty} G(n,k)$ 趋于零,有

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n+1,k) = \sum_{k=0}^{\infty} F(n,k). \tag{1.13}$$

显然 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F(n,k)$ 与 n 无关,通常取 $n=0$. 证明 (1.7) 式转化为证明

$$\sum_{k} F(0,k) = 1. \tag{1.14}$$

通常把使得 (1.10) 式与 (1.11) 式成立的 $R(n,k)$ 称为 WZ Certificate,同时将得到的两个恒等式,简称为 WZ对. 证明 WZ对除了验证其满足 (1.11) 式外还应该满足条件: (I) 对任意正整数 k,极限

$$f_k = \lim_{n\to\infty} F(n,k) \tag{1.15}$$

存在并有限. (II) 对每个非负整数 n,

$$\lim_{k\to\pm\infty} G(n,k) = 0. \tag{1.16}$$

(III) 对任意整数 L 有

$$\lim_{L\to\infty} G(n,-L) = 0. \tag{1.17}$$

引理 **1**[5] 如果 $F(n,k)$ 是满足定义 1的超几何级数项,则有

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k). \tag{1.18}$$

其中

$$R(n,k) := \frac{G(n,k)}{F(n,k)} \tag{1.19}$$

是关于 n 和 k 的有理多项式,称之为 Certificate.

证明 参见 WZ方法并结合线性代数相关知识,引理 1容易证明. 其它证法可参考文献 [5, 6].

引理 **2**[6] 令 $[F,G]$ 满足 (1.11) 式,如果条件 (II) 成立,则有恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n,k) = c(c\text{代表常数}). \tag{1.20}$$

如果条件 (I), (III) 成立且 f 满足 (1.15) 式则又可以得到另外的恒等式

$$\sum_{n\geq 0} G(n,k) = \sum_{j\leq k-1} (f_j - F(0,j)). \tag{1.21}$$

证明 对 (1.11) 式两边从 $k=-L$ 到 K 进行求和得

$$\Delta_n\left\{\sum_{k=-L}^{K} F(n,k)\right\} = \sum_{k=-L}^{K}\{\Delta_k G(n,k)\} = G(n,K+1) - G(n,-L), \tag{1.22}$$

其中 Δ_n,Δ_k 分别是关于 n,k 的差分算子. 结合 (1.22) 式 $(K,L\to\infty)$ 及条件 (II),可以发现 $\sum\limits_{k} F(n,k)$ 与 n 无关, (1.20) 式得以证明.

同样,对 (1.11) 式两边从 $n=0$ 到 N 求和得

$$F(N+1,k) - F(0,k) = \Delta_k\left\{\sum_{n=0}^{N} G(n,k)\right\}. \tag{1.23}$$

对 (1.23) 式取极限 $(N\to\infty)$ 并利用条件 (I) 得

$$f_k - F(0,k) = \Delta_k\{G(n,k)\}. \tag{1.24}$$

对 (1.24) 从 $-L$ 到 $k-1$ 求和并利用条件 (III),可以知道 (1.21) 式成立.

由引理 1和引理 2,我们可以看出 WZ方法的成功之处在于两个方面: (1) 证明已知恒等式; (2) 通过已知恒等式的 Certificate寻找新的恒等式. WZ对可以通过如下方式来构造: (i) 选定任意的函数 $\mathrm{H}(n,k)$; (ii) 令 $F=\Delta_k \mathrm{H}(n,k)$, $G=\Delta_n \mathrm{H}(n,k)$. 如果要证明的是超几何恒等式,只需要选择具有封闭形式的 $\mathrm{H}(n,k)$.

2 主要结果

用 WZ方法证明所给的恒等式,我们将得到一组 $[F,G]$ 满足 (1.11) 式或 (1.18) 式,否则 WZ方法失效 (等式依然可能成立).

定理 **1** 证明 Bailey ${}_4F_3$ 恒等式[1]:

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} a/2,(a+1)/2,b+n,-n \\ b/2,(b+1)/2,a+1 \end{matrix};1\right) = \frac{(b-a)_n}{(b)_n}. \tag{2.1}$$

证明 记

$$s(n)=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}. \qquad (2.2)$$

由引理 1,只需证明

$$(b+n-1)s(n)-(b-a+n-1)s(n-1)=0. \qquad (2.3)$$

由 WZ方法可以得到二阶递推关系:

$$(n+1)(-n-b+a)F(n,k)+(-a^2+ba-a+2nb+3b+2+4n+2n^2)F(n+1,k)-(b+n+1)(a+n+2)F(n+2,k)=G(n,k+1)-G(n,k), \qquad (2.4)$$

其中

$$G(n,k)=(-(a+1+2k)(a+2k)(b+n+k)(n+1)/(b+n)(n-k+1)F(n,k). \qquad (2.5)$$

显然

$$(n+1)(-n-b+a)s(n)+(-a^2+ba-a+2nb+3b+2+4n+2n^2)s(n+1)-(b+n+1)(a+n+2)s(n+2)=0. \qquad (2.6)$$

因为 $s(0)=1, s(1)=\frac{b-a}{b}$ 且 $s(n)=\frac{(b-a)_n}{(b)_n}$ 满足(2.6)式,所以(2.1)式成立.

定理 2 证明 Vandermonde恒等式[6]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}, n\geq 0. \qquad (2.7)$$

证明 由引理 1知,函数

$$F(n,k)=\binom{2n}{n}^{-1}\binom{n}{k}, \qquad (2.8)$$

$$G(n,k)=-\frac{1}{2}\frac{\binom{n}{k}^2(3n+3-2k)k^2}{\binom{2n}{n}(2n+1)(n+1-k)^2} \qquad (2.9)$$

是(2.7)式的一组 WZ对.只需取

$$R(n,k)=-\frac{1}{2}\frac{k^2(3n+3-2k)}{(n+1-k)^2(2n+1)}. \qquad (2.10)$$

容易知道(2.8)式,(2.9)式满足(1.11)式及条件(I)~(III).根据引理 2,得到一个新的对偶恒等式

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(3n+1-2k)}{(2n+1)\binom{2n}{n}}\binom{n}{k}^2=2. \qquad (2.11)$$

定理 3 证明李善兰恒等式[2,3]:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{m+2n-k}{2n}=\binom{m+n}{2}^2.$$

证明 只要取

$$R(n,k)=-\frac{1}{2}(-m-2n-1+k)k^2\{[-4(n+1)-3m+3k](n+1)+2mk\}/(2n+1)(-n-1+k)^2(m+n+1),$$

就可以证明定理 3.

参考文献:

[1] George Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy. Special functions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[2] 宋立新.李善兰恒等式的概率证明[J].高等数学研究, 2006, 9: 102.

[3] 初文昌.形式幂级数技巧的应用Ⅰ:李善兰恒等式的初等证明[J].数学的实践与认识, 1990(1): 82-84.

[4] Gosper, Jr R W. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 1978, 75: 40-42.

[5] Petkovšek M, Wilf H, Zeilberger D. A=B[M]. Wellesley: A K Peters, 1996.

[6] Herbert S Wilf, Doron Zeilberger. Rational functions certify combinatorial identities [J]. Amer Math Soc, 1990, 3: 147-158.

[7] Gasper G, Rahman M. Basic hypergeometric series [M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[8] Earl D Rainville. Special functions[M]. New York: Macmillan, 1960.

[9] Ismail M E H. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

(责任编辑: 尹 闯)