DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2009.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 2009, 16(1): 9~12

图 $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$的优美性和奇强协调性*
The Graceful and Odd Strongly Harmonious of $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$

邓天炎[1,2],黄立强[2],李西洋[2]
DENG Tian-yan[1,2], HUANG Li-qiang[2], LI Xi-yang[2]

(1.贵州大学计算机科学系,贵州贵阳 550025; 2.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530023)
(1. Department of Computer Science, Guizhou University, Guiyang, Guizhou, 550025, China;
2. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China)

摘要: 定义图 $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$的概念,证明它是优美图和奇强协调图,还证明图 $G_1(2n,m)$也是奇强协调的.
关键词: 图论 顶点标号 优美性 奇强协调性
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2009)01-0009-04

Abstract This article introduces the notion of $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$ and shows that $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$ is graceful and odd strongly harmonious. In addition, it is proofed that $G_1(2n,m)$ is also odd strongly harmonious.
Key words graph, vertex labeling, graceful, odd strongly harmonious

1967年 Rosa[1]提出图的优美标号的概念,而后 Graham和 Sloane又提出图的协调标号.经过几十年的探索研究,图的优美标号及协调标号已经取得不少的成果[2~4].王卫军,严谦泰[5]提出图的奇优美标号和奇强协调标号,并讨论图 $D_{n,4}$的奇优美性和奇强协调性.刘春峰等[6]给出 m 重-四角鲜人掌的优美性和序列性的证明.本文在此基础上给出图 $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$的概念,证明图 $m(G_1(2n,1)*G_2(2n,1))$的优美性和奇强协调性,并且讨论了图 $G_1(2n,m)$的奇强协调性.全文的术语除特别说明外,均参考文献[7].

1 基本概念

定义 1[4] 一个有 q条边的简单图 $G=(V,E)$,如果存在一个单射 $f: V(G)\to\{0,1,2,\cdots,q\}$,使得对所有的边 $e=\{uv\}\in E(G)$,由 $f^*(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出 $E(G)\to\{1,2,3,\cdots,q\}$是一个一一对应,则称 G是优美图,f是 G的优美标号或优美值.

定义 2[5] 简单图 $G=(V,E)$称为奇强协调的,如果存在一个单射 $f: V(G)\to\{0,1,2,\cdots,2|E|-1\}$,使得对所有的边 $e=uv\in E(G)$,由 $f^*(uv)=f(u)+f(v)$导出的映射 $f^*: E(G)\to\{1,3,5,\cdots,2|E|-1\}$是一个一一对应.$f$称为 G的奇强协调标号.

定义 3[6] 每个均为 $k_{2,m}$的连通图称为 m重-四角鲜人掌图,记为 $G(m,n)$.设图 $G_i=(A_i,B_i,E_i)\cong k_{2,m}(i=1,2,3,\cdots,n)$,$A_i=\{x_{1,i},x_{2,i}\}$,$B_i=\{y_{1,i},y_{2,i},\cdots,y_{m,i}\}$,$i=1,2,3,\cdots,n$.由 G_i构造 $G(m,n)$满足 $|V(G_i)\cap V(G_{i+1})|=1$,$i=1,2,3,\cdots,n-1$,且当 $|i-j|\neq 1$时,$|V(G_i)\cap V(G_{i+1})|=0$.对于 $G(m,n)$,有 $V(G_i)\cap V(G_{i+1})=\{x_{2,i}\}=\{x_{1,i+1}\}$,$i=1,2,3,\cdots,n-1$,则称 $G(m,n)$为 A型 m重-四角链图,记为 $G_1(m,n)$.若 $V(G_i)\cap V(G_{i+1})=\{y_{m,i}\}=\{y_{1,i+1}\}$,$i=1,2,3,\cdots,n-1$,则称 $G(m,n)$为 B

收稿日期: 2008-08-25
作者简介: 邓天炎(1963-),男,博士研究生,副教授,主要从事图论、计算复杂性的研究。
* 国家自然科学基金项目(10771095),广西师范学院青年科研基金项目(0605B007)资助。

型 m 重 -四角链图,记为 $G_2(m,n)$.

定义 4　由 $G_1(2n,1)$ 中度数为 $2n$ 的某个顶点与 $G_2(2n,1)$ 中最外层度数为 2的某个顶点粘接而成的图记为 $G_1(2n,1)^* G_2(2n,1)$. 由 m 个 $G_1(2n,1)$ 和 m 个 $G_2(2n,1)$ 交错粘接而形成的图记为 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$.

图 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$ 共有 $8mn$ 条边,为叙述方便,我们规定图 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$ 的顶点记号如图 1所示.

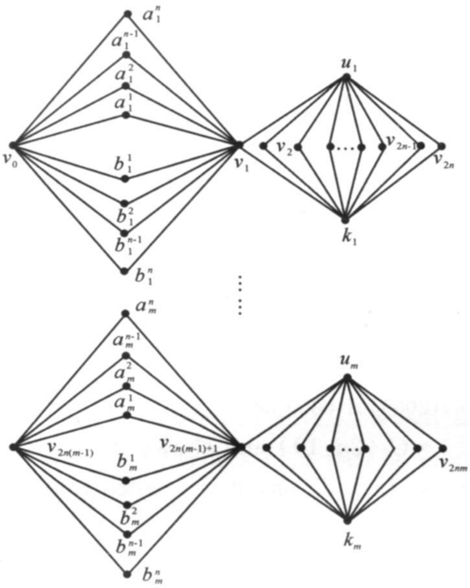

图 1　$m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$的顶点

Fig. 1　Vertex of $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$

2　主要结果

定理 1　$m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$是优美图.

证明　对图的顶点(图 1)进行标号.

$f(a_j^1)=f(k_j)+1, f(b_j^1)=f(k_j)+3, f(a_j^i)=f(a_j^1)+(i-1)\times 4, f(b_j^i)=f(b_j^1)+(i-1)\times 4$, 其中 $i=1,2,3,\cdots,n, n\geq 2, j=1,2,3,\cdots,m$.

$f(u_i)=8+(m-1)\times 16+[4+8(m-1)](n-2)+(i-1)[-(4n+1)], f(k_i)=f(u_i)+1$,其中 $i=1,2,\cdots,m$.

$f(v_0)=0, f(v_{i+(j-1)\times 2n})=1+(i-1)\times 2+(j-1)\times(4n-1), i=1,2,3,\cdots,2n$.

分两个步骤证明 f 是图 1的一个优美标号.

(1) 因为 $f(v_{i+(j-1)\times 2n})=1+(i-1)\times 2+(j-1)\times(4n-1)$,所以当 i 取$\{1,2,3,\cdots,2n\}$, j 取遍$\{1,2,3,\cdots,m\}$时, $f(v_{i+(j-1)\times 2n})$ 取遍 $\{1,3,5,\cdots,4mn-m\}$. 而 $f(v_0)=0, f(u_i)=8mn+1-i(4n+1)$,所以当 i 取遍$\{1,2,3,\cdots,m\}$时, $f(u_i)$ 取遍$\{8mn-4n, 8mn-8n-1,\cdots,4mn+1-m\}$. 而 $f(k_i)=f(u_i)+1$,所以当 i 取遍$\{1,2,3,\cdots,m\}$时, $f(k_i)$ 取遍$\{8mn-4n+1, 8mn-8n,\cdots,4mn+2-m\}$. 又因为 $f(a_j^1)=f(k_j)+1, f(b_j^1)=f(k_j)+3$,所以当 j 取遍$\{1,2,3,\cdots,m\}$时, $f(a_j^1)$取遍$\{8mn-4n+2, 8mn-8n+1,\cdots,4mn+3-m\}$, $f(b_j^1)$取遍$\{8mn-4n+4, 8mn-8n+3,\cdots,4mn+5-m\}$. 而 $f(a_j^i)=f(k_j)+4i-3, f(b_j^i)=f(k_j)+4i-1$,所以当 i 取遍$\{1,2,3,\cdots,n\}$, j 取遍$\{1,2,3,\cdots,m\}$时, $f(a_j^i)$和$f(b_j^i)$分别取遍$\{8mn-4n+2, 8mn-8n+1,\cdots,4mn+3-m,\cdots,8mn-2, 8mn-4n-3,\cdots,4mn-m+4n-1\}$和$\{8mn-4n+4, 8mn-8n+3,\cdots,4mn+5-m,\cdots,8mn, 8mn-4n-1,\cdots,4mn+4n-m+1\}$. 由此可知 $f: V(G)\to\{0,1,2,3,\cdots,8mn\}$是一个单射.

(2) 因为 u_m 与 $v_{2n(m-1)+1}, v_{2n(m-1)+2},\cdots,v_{2mn}$ 相邻, k_m 与 $v_{2n(m-1)+1}, v_{2n(m-1)+2},\cdots,v_{2mn}$ 相邻,而 $f(u_m)=4mn+1-m, f(k_m)=4mn+2-m, f(v_{2n(m-1)+1})=4mn-m-4n+2, f(v_{2n(m-1)+2})=4mn-m-4n+4,\cdots,f(v_{2mn})=4mn-m$,所以 $f^*(u_mv_{2mn})=|f(u_m)-f(v_{2mn})|=1, f^*(k_mv_{2mn})=|f(k_m)-f(v_{2mn})|=2, f^*(u_mv_{2mn-1})=|f(u_m)-f(v_{2mn-1})|=3, f^*(k_mv_{2mn-1})=|f(k_m)-f(v_{2mn-1})|=4$. 以此类推到 u_m 与 $v_{2n(m-1)+1}, v_{2n(m-1)+2}$ 相邻, k_m 与 $v_{2n(m-1)+1}, v_{2n(m-1)+2}$ 相邻的情况. 所以 $f^*(u_mv_{2n(m-1)+1})=4n-1, f^*(u_mv_{2n(m-1)+2})=4n-3, f^*(k_mv_{2n(m-1)+1})=4n, f^*(k_mv_{2n(m-1)+2})=4n-2$. 同理可知 v_0 与 a_1^i, b_1^i; v_1 与 a_1^i, b_1^i 相邻的情况. 因为 $f(v_0)=0, f(v_1)=1, f(a_1^i)=8mn-4n+4i-2, f(b_1^i)=8mn-4n+4i$, 所以 $f^*(v_0a_1^i)=8mn-4n+4i-2, f^*(v_0b_1^i)=8mn-4n+4i, f^*(v_0a_1^i)=8mn-4n+4i-3, f^*(v_1b_1^i)=8mn-4n+4i-1$. 那么当 i 取遍$\{1,2,3,\cdots,n\}$时, $f^*(v_0a_1^i)$取遍$\{8mn-4n+2, 8mn-4n+6,\cdots,8mn-2\}$, $f^*(v_0b_1^i)$取遍$\{8mn-4n+4,\cdots,8mn\}$, $f^*(v_1a_1^i)$取遍$\{8mn-4n+1,\cdots,8mn-3\}$, $f^*(v_1b_1^i)$取遍$\{8mn-4n+3, 8mn-4n+7,\cdots,8mn-1\}$. 综上所述,由 f^* 导出 $E(G)\to\{1,2,3,4,\cdots,8nm\}$的一个一一对应. 因此,结论成立.

定理 2　图 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$是奇强协调的.

证明　给出顶点标号: $f(u_j)=8n+5+(j-2)\times 8n, n\geq 2, j=2,3,4,\cdots,m, f(k_1)=7, f(k_j)$

$=f(u_j)+2, f(u_1)=5, f(v_j)=4j, j=0,1,2,3,\cdots,2mn, f(a_j^1)=9+(j-2)\times 8n, n\geq 2, j=2,3,\cdots,m, f(a_1^1)=1, f(b_j^1)=f(a_j^1)+2, f(b_1^1)=3, f(a_j^i)=9+(j-2)\times 8n+(i-1)\times 8, f(b_j^i)=f(a_j^i)+2$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n(n\geq 2), j=2,3,\cdots,m$. $f(a_1^2)=f(k_m)+f(v_{2mn})+2, f(b_1^2)=f(a_1^2)+2, f(a_1^i)=f(k_m)+f(v_{2mn})+2+(i-2)\times 8, f(b_1^i)=f(a_1^i)+2$，其中 $i=2,3,\cdots,n(n\geq 2)$. 然后分两个步骤证明这些标号是奇强协调标号.

(1) 因为 $f(v_j)=4j$，所以当 j 取遍 $\{0,1,2,3,\cdots,2mn\}$ 时，$f(v_j)$ 取遍 $\{0,4,8,\cdots,8mn\}$. 又因为 $f(u_j)=8n+5+(j-2)\times 8n=8n(j-1)+5$，所以当 j 取遍 $\{1,2,3,\cdots,m\}$ 时，$f(u_j)$ 取遍 $\{5,8n+5,16n+5,\cdots,8mn-8n+5\}$. 再因为 $f(k_j)=f(u_j)+2=8n(j-1)+7$，所以当 j 取遍 $\{1,2,3,\cdots,m\}$ 时，$f(k_j)$ 取遍 $\{7,8n+7,16n+7,\cdots,8n(m-1)+7\}$. 因为 $f(a_j^1)=9+(j-2)\times 8n, n\geq 2, j=2,3,\cdots,m$，所以当 j 取遍 $\{2,3,\cdots,m\}$ 时，$f(a_j^1)$ 取遍 $\{9,8n+9,\cdots,9+(m-2)\times 8n\}$. 因为 $f(b_j^1)=11+(j-2)\times 8n, j=2,3,\cdots,m, m\geq 2$，所以当 j 取遍 $\{2,3,\cdots,m\}$ 时，$f(b_j^1)$ 取遍 $\{11,8n+11,\cdots,11+(m-2)\times 8n\}$. 因为 $f(a_j^i)=9+(j-2)\times 8n+(i-1)\times 8, f(b_j^i)=f(a_j^i)+2$，所以当 i 取遍 $\{1,2,3,\cdots,n\}$，j 取遍 $\{2,3,\cdots,m\}$ 时，$f(a_j^i)$ 取遍 $\{9,17,\cdots,8n+1,8n+9,8n+17,\cdots,8mn-8n+1\}$，$f(b_j^i)$ 取遍 $\{11,19,\cdots,8n+3,8n+11,8n+19,\cdots,8mn-8n+3\}$. 因为 $f(a_1^2)=f(k_m)+f(v_{2mn})+2, f(b_1^2)=f(k_m)+f(v_{2mn})+4$，所以 $f(a_1^2)=16mn-8n+9, f(b_1^2)=f(a_1^2)+2, f(a_1^i)=16mn-8n+9+(i-2)\times 8, f(b_1^i)=16mn-8n+11+(i-2)\times 8$，其中 $i=2,3,\cdots,n(n\geq 2)$. 所以当 i 取遍 $\{2,3,\cdots,n\}$ 时，$f(a_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+9,16mn-8n+17,\cdots,16mn-7\}$，$f(b_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+11,16mn-8n+19,\cdots,16mn-5\}$. 显然 $f: V(G)\to\{0,1,2,\cdots,16mn-1\}$ 是一个单射.

(2) 因为 a_1^i 与 v_0, v_1 相邻，b_1^i 与 v_0, v_1 相邻，$i=1,2,3,\cdots,n$，$f(a_1^1)=1, f(b_1^1)=3, f(v_0)=0, f(v_1)=4, f(a_1^i)=f(k_m)+f(v_{2mn})+2+(i-2)\times 8=16mn-8n+9+(i-2)\times 8, f(b_1^i)=f(k_m)+f(v_{2mn})+4+(i-2)\times 8=16mn-8n+11+(i-2)\times 8$，所以 $f^*(v_0a_1^1)=f(v_0)+f(a_1^1)=1, f^*(v_0b_1^1)=f(v_0)+f(b_1^1)=3, f^*(v_1a_1^1)=f(v_1)+f(a_1^1)=5, f^*(v_1b_1^1)=f(v_1)+f(b_1^1)=7, f^*(v_0a_1^i)=16mn-8n+9+(i-2)\times 8, f^*(v_0b_1^i)=16mn-8n+11+(i-2)\times 8, f^*(v_1a_1^i)=16mn-8n+13+(i-2)\times 8, f^*(v_1b_1^i)=16mn-8n+15+(i-2)\times 8$. 所以当 i 取遍 $\{2,3,\cdots,n\}$ 时，$f^*(v_0a_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+9,\cdots,16mn-7\}$，$f^*(v_0b_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+11,16mn-8n+19,\cdots,16mn-5\}$，$f^*(v_1a_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+13,16mn-8n+21,\cdots,16mn-3\}$，$f^*(v_1b_1^i)$ 取遍 $\{16mn-8n+15,16mn-8n+23,\cdots,16mn-1\}$. 又因为 u_1 与 v_i，k_1 与 v_i 相邻，$i=1,2,3,\cdots,2n$，而 $f(u_1)=5, f(k_1)=7, f(v_i)=4i, i=1,2,3,\cdots,2n$，所以 $f^*(u_1v_1)=f(u_1)+f(v_i)=5+4i, f^*(k_1v_i)=f(k_1)+f(v_i)=7+4i$. 那么当 i 取遍 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 时，$f^*(u_1v_i)$ 取遍 $\{9,13,17,\cdots,5+8n\}$，$f^*(k_1v_i)$ 取遍 $\{11,15,19,\cdots,7+8n\}$，以此类推到 a_m^i, b_m^i 与 $v_{2n(m-1)}, v_{2n(m-1)+1}$ 以及 u_m, k_m 与 $v_{2n(m-1)+1}, v_{2mn}$ 相邻的情况. 因为 a_m^i 与 $v_{2n(m-1)}, v_{2n(m-1)+1}$ 相邻，b_m^i 与 $v_{2n(m-1)}, v_{2n(m-1)+1}$ 相邻. 而 $f(a_m^1)=9+(m-2)\times 8n=8mn-16n+9, f(v_{2n(m-1)})=8n(m-1)=8mn-8n, f(b_m^1)=8mn-16n+11, f(v_{2n(m-1)+1})=8n(m-1)+4=8mn-8n+4, f(b_m^i)=8mn-16n+8i+3, f(a_m^i)=8mn-16n+8i+1$，所以 $f^*(a_m^1v_{2n(m-1)})=16mn-24n+9, f^*(b_m^1v_{2n(m-1)})=16mn-24n+11, f^*(a_m^1v_{2n(m-1)+1})=16mn-24n+13, f^*(b_m^1v_{2n(m-1)+1})=16mn-24n+15, f^*(a_m^iv_{2n(m-1)})=16mn-24n+8i+1, f^*(b_m^iv_{2n(m-1)})=16mn-24n+8i+3, f^*(a_m^iv_{2n(m-1)+1})=16mn-24n+8i+5, f^*(b_m^iv_{2n(m-1)+1})=16mn-24n+8i+7$. 当 i 取遍 $\{2,3,\cdots,n\}$ 时，$f^*(a_m^iv_{2n(m-1)})$ 取遍 $\{16mn-24n+17,\cdots,16mn-16n+1\}$，$f^*(b_m^iv_{2n(m-1)})$ 取遍 $\{16mn-24n+19,16mn-24n+27,\cdots,16mn-16n+3\}$，$f^*(a_m^iv_{2n(m-1)+1})$ 取遍 $\{16mn-24n+21,16mn-24n+29,\cdots,16mn-16n+5\}$，$f^*(b_m^iv_{2n(m-1)+1})$ 取遍 $\{16mn-24n+23,16mn-24n+31,\cdots,16mn-16n+7\}$. 因为 u_m, k_m 与 $v_{2n(m-1)+i}, i=1,2,3,\cdots,2n$ 相邻，而 $f(u_m)=8n(m-1)+5, f(k_m)=8n(m-1)+7, f(v_{2n(m-1)+i})=8n(m-1)+4i$，所以 $f^*(u_mv_{2n(m-1)+i})=16mn-16n+5+4i, f^*(k_mv_{2n(m-1)+i})=16mn-16n+7+4i$. 当 i 取遍 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 时，$f^*(u_mv_{2n(m-1)+i})$ 取遍 $\{16mn-16n+9,\cdots,16mn-8n+5\}$，$f^*(k_mv_{2n(m-1)+i})$ 取遍

$\{16mn-16n+11, 16mn-16n+15, \cdots, 16mn-8n+7\}$. 综上所述, f^* 是一个从 $E(G) \to \{1,3,5,\cdots,16mn-1\}$ 的一一对应, 所以 f 是图 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$ 的奇强协调标号, 故图 $m(G_1(2n,1)^* G_2(2n,1))$ 是一个奇强协调图.

定理 3 $G_1(2n,m)$ 是奇强协调的.

证明 根据 m 和 n 奇偶性, 分两种情形讨论. 这里只给出两种情形的顶点的标号, 证明方法与定理 2类似.

情形 1 $m \equiv 0(\text{mod}2)$, $n \equiv 0(\text{mod}2)$ 时, 令 $m=2k$, $n=2z$.

图 $G_1(2n,m)$ 共有 $4n \times 2k$ 条边, 规定图 $G_1(2n,m)$ 的顶点记号如图 2所示.

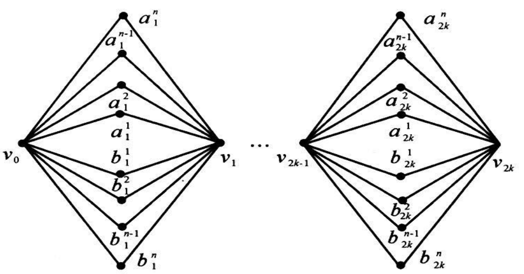

图 2 $G_1(2n,m)$的顶点

Fig. 2 Vertex of $G_1(2n,m)$

给出顶点标号: $f(v_i)=4i$, $i=0,1,2,3,\cdots,2k$, $f(a_i^1)=4i-1$, $f(b_i^1)=4i-3$, $i=1,2,3,\cdots,2k$, $f(a_{2k}^i)=7+16ki-24k$, $f(b_{2k}^i)=f(a_{2k}^i)-2$, $i=2,4,\cdots,2z$, $f(a_{2k}^j)=16kj-8k-1$, $f(b_{2k}^j)=f(a_{2k}^j)-2$, $j=1,3,\cdots,2z-1$, $f(a_g^i)-f(a_{g+1}^i)=12$, $g=1,2,3,\cdots,2k-1$, $i=2,4,\cdots,2z$, $f(a_{t+1}^j)-f(a_t^j)=4$, $t=1,2,3,\cdots,2k-1$, $j=1,3,5,\cdots,2z-1$, $f(b_{t+1}^j)-f(b_t^j)=4$, $t=1,2,3,\cdots,2k-1$, $j=1,3,5,\cdots,2z-1$, $f(b_g^i)-f(b_{g+1}^i)=12$, $g=1,2,3,\cdots,2k-1$, $i=2,4,\cdots,2z$.

同理可以验证 f^* 是一个从 $E(G) \to \{1,3,5,\cdots,32kz-1\}$ 的一一对应, 所以 f 是奇强协调标号. 从而当 $m \equiv 0(\text{mod}2)$, $n \equiv 0(\text{mod}2)$ 时, 图 $G(2n,m)$ 是奇强协调图.

当 $m \equiv 0(\text{mod}2)$, $n \equiv 1(\text{mod}2)$ 时, 只要 j 取到 $2z+1$, i 取到 $2z$, 其余的取值和标号均不变, 同理可以证明 f 是奇强协调标号.

综上所述, 当 $m \equiv 0(\text{mod}2)$, $n \equiv 0(\text{mod}2)$ 或 $n \equiv 1(\text{mod}2)$ 时, 图 $G_1(2n,m)$ 是奇强协调图.

情形 2 $m \equiv 1(\text{mod}2)$ 时, 令 $m=2k+1$. 当 $n \equiv 0(\text{mod}2)$ 时, 令 $n=2z$, 顶点标号为: $f(v_i)=4i$, $i=0,1,2,3,\cdots,2k+1$, $f(a_i^1)=4i-1$, $f(b_i^1)=4i-3$, $i=1,2,3,\cdots,2k+1$, $f(a_{2k+1}^{2i})=(32k+16)i-24k-5$, $f(a_{2k+1}^{2i-1})=(32k+16)i-24k-13$, $f(a_j^{2i})-f(a_{j+1}^{2i})=12$, $f(a_{j+1}^{2i-1})-f(a_j^{2i-1})=4$, $f(b_{2k+1}^{2i})=f(a_{2k+1}^{2i})-2$, $f(b_{2k+1}^{2i-1})=f(a_{2k+1}^{2i-1})-2$, $f(b_j^{2i})-f(b_{j+1}^{2i})=12$, $f(b_{j+1}^{2i-1})-f(b_j^{2i-1})=4$, 其中 $i=1,2,3,\cdots,z$, $j=1,2,3,\cdots,2k$.

当 $n \equiv 1(\text{mod}2)$, 令 $n=2z+1$, 顶点标号为: $f(a_j^{2i})-f(a_{j+1}^{2i})=12$, $f(a_{j+1}^{2i+1})-f(a_j^{2i+1})=4$, $f(b_j^{2i})-f(b_{j+1}^{2i})=12$, $f(b_{j+1}^{2i+1})-f(b_j^{2i+1})=4$, $i=1,2,3,\cdots,z$, $j=1,2,3,\cdots,2k$, $f(a_{2k+1}^{2i})=(32k+16)i-24k-5$, $f(a_{2k+1}^{2i-1})=(32k+16)i-24k-13$, $i=1,2,3,\cdots,z+1$, $f(b_{2k+1}^{2i})=f(a_{2k+1}^{2i})-2$, $f(b_{2k+1}^{2i-1})=f(a_{2k+1}^{2i-1})-2$, $i=1,2,3,\cdots,z$, 其余的顶点保持标号不变.

综上所述, $G_1(2n,m)$ 是奇强协调的.

参考文献:

[1] Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph [J]. Theory of Graphs (Intermat, Symposivm, Rome, July 1966) Gordon and Breach, N Y and Dvnod Paris, 1967: 349-355.

[2] Gallian A. A guide to the graph labeling zoo[J]. Discrete Applied Mathematics, 1994(49): 213-229.

[3] Frank Hsu D. Harmonious labelings of windmill graphs and related gradphs[J]. Journal of Graph Theory, 1982, 6(1): 85-87.

[4] 马克杰. 优美图 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

[5] 王卫军, 严谦泰. 关于图 $D_{n,4}$ 的奇优美性和奇强协调性 [J]. 南阳师范学院学报, 2003(9): 1-2.

[6] 刘春峰, 赵连昌. m 重四角鲜人掌的优美性和序列性 [J]. 吉林师范大学学报, 2006 (5): 4-9.

[7] J A 邦迪, U S R 墨蒂. 图论及其应用 [M]. 吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 等译. 北京: 科学出版社, 1984.

(责任编辑: 尹 闯)