DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.018
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 396~398

一种基于多指标的模糊数排序方法*

An Approach for Fuzzy Number Ranking Based on Multi-index

王中兴,刘勇军
WANG Zhong-xing, LIU Yong-jun

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 根据模糊数正向流指标和负向流指标分别定义正向效用函数和负向效用函数,然后综合正、负向效用函数的特点,提出一种基于多指标排序模糊数的方法,并通过算例来验证其有效性.该方法所得排序结果合理,与部分已知的方法所得结论一致,能较好地依据决策者的偏好排序模糊数.

关键词: 模糊数 多指标 优势度 排序
中图法分类号: C934 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0396-03

Abstract Based on the characteristic of the local and global information indexes of fuzzy number, we divide the indexes of fuzzy number into positive flow index and negative flow index. Then, we define the positive utility function and negative utility function according to the given positive flow index and negative flow index, and then an approach for fuzzy number ranking based on multi-index is proposed by the defined positive flow index and negative flow index. Finally, some numerical examples are used to illustrate the validity and advantage of the proposed ranking method.

Key words fuzzy number, multi-index, superiority degree, ranking

在多属性决策分析中,由于决策环境的不确定性以及人们思维的模糊性,决策者对属性值的判定通常只能用模糊数来表示.因此,模糊数的比较与排序就成为决策分析领域的研究热点之一,并广泛地应用于数值分析、人工智能、神经网络、金融等领域.很多学者对模糊数排序问题进行过研究,并取得了不少成果[1~15].但是由于模糊数半序结构的特点,现有方法都或多或少存在缺陷.例如,存在分辨力不足、计算复杂、难于理解、排序结果不一致性、甚至排序结果与直观相反等问题.迄今为止,还没有一种方法被公认为最好的方法.模糊数的比较与排序问题的研究有待进一步完善.

本文综合考虑模糊数局部和整体特征指标的特点,构造排序模糊数的正向效用函数和负向效用函数,进而提出一种基于多指标的模糊数排序方法.

收稿日期: 2008-01-27
作者简介: 王中兴(1962-),男,教授,主要从事优化与决策方面的研究工作。
* 广西大学科学技术研究重点基金项目(2005ZD02)资助。

1 预备知识

定义 1[15] 设 A 是定义在实数上的 L-R型模糊数,其隶属函数满足关系式

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L_A\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), -\infty < x \leqslant m, \alpha > 0, \\ 1, m \leqslant x \leqslant n, \\ R_A\left(\frac{x-n}{\beta}\right), n < x < +\infty, \beta > 0, \end{cases}$$

其中 $L_A(x)$, $R_A(x)$ 在 $x \in [0,+\infty)$ 上连续且严格递减,其反函数分别记为 $g_A^L(y)$ 和 $g_A^R(y)$,并且还记为 $A=(m,n,\alpha,\beta)_{LR}$.

定义 2[14] 模糊集 A 的支撑集表示为 $S(A)=\{x \in R | \mu_A(x) > 0\}$.对于任意给定的一组模糊数 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$,其支撑集的上、下确界分别记为 $x_{\max}=\sup\limits_{x \in S}\{x\}$, $x_{\min}=\inf\limits_{x \in S}\{x\}$,其中 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{n} S(A_i)$.

定义 3 模糊数 A_i 的均值[3]、清晰点[7]、模糊度[7]、左右相离度、散度以及峰值[12]分别表示为

$$W = \frac{\int_{x\in S(A_i)} x\_\,(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{x\in S(A_i)} \_\,(x)\,\mathrm{d}x},\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.1}$$

$$V_i = \frac{1}{2}\int_0^1 (g_i^L + g_i^R)\,\mathrm{d}T,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Amb}(A_i) = \frac{1}{2}\int_0^1 (g_i^R - g_i^L)\,\mathrm{d}T,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.3}$$

$$S_i^L = \int_0^1 (g_i^L - x_{\min})\,\mathrm{d}T,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.4}$$

$$S_i^R = \int_0^1 (x_{\max} - g_i^R)\,\mathrm{d}T,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.5}$$

$$d_i = n_i + U + T_i - m_i,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.6}$$

$$M_i = \{x \mid \sup\_\,(x) \geqslant 0, x\in S(A_i)\},$$
$$i = 1,2,\cdots,n. \tag{1.7}$$

若(1.7)式满足区间数 $[T_i, b_i]$,则记 $M_i = \frac{T_i + b_i}{2}$. 由于当均值、清晰点、左相离度以及峰值越大时,对应的模糊数的优先程度就越高.因此,称这些指标为正向流指标.而当模糊度、散度以及右相离度越大时,相应的模糊数的优先程度越劣,故称其为负向流指标.

定义 4 模糊数 A_i 的优先权重,优势函数以及相对于 A_j 的优势度分别定义为

$$w_i = W_i \Big/ \sum_{i=1}^n W_i,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.8}$$

$$h_i = V_1 V_i + V_2 S_i^L + V_3 M_i,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.9}$$

$$r_{ij} = \frac{h_i}{h_i + h_j},\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.10}$$

其中 $V_i(i = 1,2,3)$ 为决策者的偏好系数,由决策者事先确定.

对于任意给定的一组模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$,根据(1.10)式,可以得到其优势度矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$,其中 $r_{ii} = 0.5$, $r_{ij} + r_{ji} = 1(i,j = 1,2,\cdots,n)$. 由(1.8)式和(1.10)式,可以得到模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的正向流的效用函数为

$$Z_i^+ = \sum_{j=1}^n w_i r_{ij},\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{1.11}$$

定义 5 模糊数 A_i 负向流效用函数为

$$Z_i^- = \theta_1 \cdot \bar{w}_i\Big(\lambda_1 \cdot \frac{\mathrm{Amb}(A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathrm{Amb}(A_i)} + \lambda_2 \cdot d_i \Big/ \sum_{i=1}^n d_i\Big) + \theta_2 \cdot S_i^R \Big/ \sum_{i=1}^n S_i^R,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{1.12}$$

其中,$\bar{w}_i = \frac{1}{W_i} \Big/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i}(i = 1,2,\cdots,n)$,$\theta_1,\theta_2;\lambda_1,\lambda_2$ 为决策者的偏好系数,由决策者事先确定.

2 模糊数排序方法

根据定义 1~5,对于任意一组模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots n)$,提出排序指标

$$Z_i = Z_i^+ - Z_i^-,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.1}$$

对于任意给定的两个模糊数 A_i 和 A_j,其排序准则为:(i)若 $Z_i > Z_j$,则 $A_i \succ A_j$;(ii)若 $Z_i \sim Z_j$,则 $A_i = A_j$.

容易验证,所提出的排序指标具有性质:

(1)对于模糊数 A_i, A_j, A_k,若 $A_i \succ A_j, A_j \succ A_k$,则 $A_i \succ A_k$.

(2)对于模糊数 A_i 和 A_j,若 $\inf(S(A_i)) \geqslant \sup(S(A_j))$,则 $A_i \succ A_j$.

(3)若 $A_i \succ A_j$,则将其平移 r 个单位得到新的模糊数 A'_i, A'_j,仍然有 $A'_i \succ A'_j$ 成立.

(4)若 $A_i \succ A_j, A_i \prec A_j$ 则有 $A_i \sim A_j$.

(5)对于任意一组模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$,若 $A_i \succ A_j(i \neq j, j = 1,2,\cdots,n)$成立,那么再增加一个模糊数 A_{n+1},则在这 $n+1$ 个模糊数中,仍然有 $A_i \succ A_j$ 成立.

基于多指标排序模糊数的具体步骤:

步骤 1: 根据(1.8)~(1.10)式,分别确定模糊数 A_i 的优先权重 w_i,优势函数 h_i 以及相对于 A_j 的优势度 r_{ij}.

步骤 2 根据(1.11)式,确定模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$的正向流效用函数 Z_i^+.

步骤 3: 由(1.12)式,分别确定 A_i 负向流效用函数 Z_i^-.

步骤 4: 由(2.1)式确定模糊数 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$的排序指标值 Z_i,并按其大小对模糊数进行排序.

3 算例分析

利用本文方法,对几组模糊数进行排序并将排序结果与一些已知的方法所得结果进行比较.在以下各算例中,不妨设决策者取 $V_1 = 0.5, V_2 = 0.3, V_3 = 0.2; \lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.2; \theta_1 = \theta_2 = 0.5$.

例 1 对于三角模糊数 $A_1 = (2,2,1,3)_{LR}$[2]和 L-R 型模糊数 $A_2 = (2,2,1,2)_{LR}$(如图 1所示),其中 A_2 的隶属函数满足关系式

$$\_{A_2}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-2)^2}, & x\in[1,2], \\ \sqrt{1-\frac{1}{4}(x-2)^2}, & x\in[2,4], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

计算得到 $Z_1 = 0.4375, Z_2 = -0.1844$,即有 $A_1 \succ A_2$.若利用文献[2]所提出的方法排序,结果随乐观系数(T)的变化而变化,即 $T = 0, 0.5$ 时排序结果

为 $A_1 \succ A_2$,而当 $\alpha=1$排序结果为 $A_1 \prec A_2$;利用文献[3]所提出的方法得排序结果为 $A_1 \succ A_2$;利用文献[4]所提出的方法得排序结果为 $A_1 \prec A_2$.由于 A_1,A_2具有相同的峰值,且 A_1较 A_2更贴近极大集,所以 $A_1 \succ A_2$是合理的.

例 **2** 对于以下两组模糊数[10]

Set 1: $A_1=(0.4,0.7,0.1,0.2)_{LR}$, $A_2=(0.7,0.7,0.4,0.2)_{LR}$, $A_3=(0.7,0.7,0.2,0.2)_{LR}$,如图 2 所示.

Set 2: $A_1=(0.5,0.5,0.2,0.2)_{LR}$, $A_2=(0.5,0.8,0.2,0.1)_{LR}$, $A_3=(0.5,0.5,0.2,0.4)_{LR}$,如图 3 所示.

所得的排序结果:对于 Set 1有 $Z_1=0.0517$, $Z_2=0.3025$, $Z_3=0.4898$,即 $A_3 \succ A_2 \succ A_1$;对于 Set2有 $Z_1=0.1746$, $Z_2=0.2699$, $Z_3=0.3978$,即 $A_3 \succ A_2 \succ A_1$.

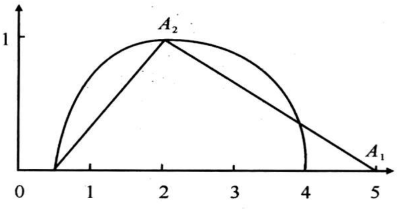

图 1 模糊数 $A_1=(2,2,1,3)_{LR}$和 $A_2=(2,2,1,2)_{LR}$

Fig. 1 Fuzzy number $A_1=(2,2,1,3)_{LR}$ and $A_2=(2,2,1,2)_{LR}$

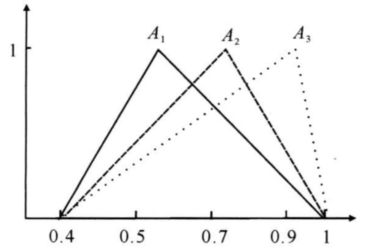

图 2 模糊数 Set 1

Fig. 2 Fuzzy number Set 1

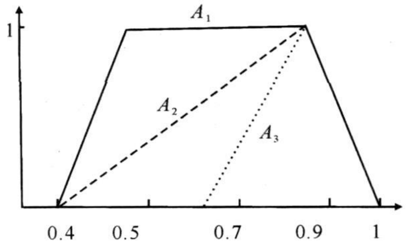

图 3 模糊数 Set 2

Fig. 3 Fuzzy number Set 2

对于 Set 1,利用 CV[9]指标进行排序所得的排序结果为 $A_1 \prec A_3 \prec A_2$,而利用距离方法[9]进行排序所得的排序结果为 $A_1 \prec A_2 \prec A_3$,两者不一致.对于 Set 2,利用文献[1]中的方法得出的排序结果为 $A_1 \sim A_2 \prec A_3$,;利用 CV[9]指标进行排序所得的排序结果为 $A_3 \prec A_2 \prec A_1$;利用质心指标方法[11]得出的结果为 $A_2 \prec A_3 \prec A_1$;利用文献[3,6~8,10]提出的方法得到的排序结果与用本方法得到的结果一致.

参考文献:

[1] Baldwin J F, Guild N C F. Comparison of fuzzy numbers on the same decision space [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1979, 2(3): 213-231.

[2] Lious T S, Wang M J. Ranking fuzzy numbers with intergral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50(3): 247-255.

[3] Chu T, Tsao C. Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point [J]. Comput Math Appl, 2002, 43(1/2): 111-117.

[4] Deng Y, Fu Z Z, Qi L. Ranking fuzzy numbers with an area method using raduis of gyration[J]. Computers and Mathemathics with Applications, 2006, 51(6/7): 1127-1136.

[5] Tran L, Duckein L. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure [J]. Fuzzy Sets Systems, 2002, 35(3): 331-341.

[6] Abbasbandy S, Asady B. Ranking of fuzzy numbers by sign distance[J]. Information Sciences, 2006, 176(16): 2405-2416.

[7] Asady B, Zendehnam A. Ranking fuzzy numbers by distance minimization [J]. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31(11): 2589-2598.

[8] Liu X W, Han S L. Ranking fuzzy numbers with preference weighting founction expectations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49(11/12): 1731-1753.

[9] Cheng C H. A new approach for ranking numbers by distance method[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95(3): 307-317.

[10] Yao J, Wu K. Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance[J]. Fuzzy Sets Systems, 2000, 116(2): 275-388.

[11] Wang Y M, Yang Jianbo, Xu Dongling. On the centroids of fuzzy numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(7): 919-926.

[12] Wang M L, Wang Hsiaofan, Lung Lin Chih. Ranking fuzzy number based on lexicograqhic screening procedure [J]. International Journal of Information Technology and Decision Making, 2005, 4(4): 663-678.

[13] Choobineh F, Li H S. An index for ordering fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 54(3): 287-294.

[14] Cheng C H, Mon D L. Fuzzy system reliability by confidence interval [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56(1): 29-35.

[15] Dubios D, Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. International Journal of Systems Science, 1978, 9(2): 613-626.

(责任编辑: 尹 闯)