DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.016
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 381～382

B样条函数的一个性质*

A Property on B-spline Function

陈广生
CHEN Guang-sheng

(河池职业学院计算机工程系,广西河池 547000)
(Department of Computer Engineering, Hechi Professional College, Hechi, Guangxi, 547000, China)

摘要: 根据 N 带尺度函数的定义,给出 B样条函数也是 N 带尺度函数的性质,和当 $N = 3$时 2阶样条函数 $h_2(x)$ 的展开式.

关键词: 样条函数 尺度函数 傅立叶变换
中图法分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0381-02

Abstract In this papers, we give a property on B-spline function using definition of N-scaling function, and give an Expansions of B-spline function $h_2(x)$ of order 2 on $N = 3$.

Key words spline function, scaling function, Fourier transformation

B样条函数有许多性质,比如具有紧支撑,支撑中心是对称的等等[1].本文根据 N 带尺度函数相关定义,给出 B样条函数也是 N 带尺度函数的性质.

1 定义及引理

设 $N > 1$为整数, Z为整数集, $L^2(R)$ 为平方可积的函数空间.

定义 1[2] 设 $h(x) \in L^2(R)$,如果能表示成

$$h(x) = \sqrt{N}\sum_{k\in Z} h_k h(Nx - k), \tag{1}$$

则称 $h(x)$为 N带尺度函数,这里 $h_k (k\in Z)$ 满足条件 $\sum_{k\in Z} |h_k|^2 < +\infty$. 我们把(1)式称为 N 尺度方程,系数 $\{h_k\}$称为尺度滤波器.

若 $h(x)$支撑区间为 $[0, L]$,则(1)式的右边是有限和,其元素个数为 $L(N - 1) + 1$个.

(1)式两边作 Fourier变换得

$$\hat{h}(k) = H_0(\frac{k}{N})\hat{h}(\frac{k}{N}), \tag{2}$$

这里

$$H_0(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k\in Z} h_k e^{-ikk}. \tag{3}$$

(3)式称为 $h(x)$的频率函数.

定义 2[1] 一阶 B样条函数 $h(x)$是单位区间 $[0, 1]$的特征函数,即

$$h_1(x) = i_{[0,1]}\begin{cases} \\ 0, x \notin [0, 1]; \end{cases} \tag{4}$$

而对于 $m \geqslant 2$时, $h_m(x)$用卷积递推关系定义为

$$h_m(x) = (h_{m-1} * h_1)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{m-1}(x - t)h(t)dt = \int_0^1 h_{m-1}(x - t)dt. \tag{5}$$

引理 1[3] 设 n为正整数,则

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_t!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}, \tag{6}$$

其中 $\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_t!}$ 为多项式系数,而且(6)式中的求和号对所有满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$的非负整数序列 $n_1, n_2, \cdots, n_t$ 求和.

2 主要结论

定理 1 设 $h_m(x)$为 m阶 B样条函数,则对于任意 $N > 1$的整数, $h_m(x)$为 N带尺度函数,即 $h_m(x)$可以表示成

$$h_m(x) = \sqrt{N}\sum_{k\in Z} h_k h_m(Nx - k), \tag{7}$$

而且(7)式的右边为有限和,其中

收稿日期: 2008-01-08
作者简介: 陈广生(1979-),男,讲师,主要从事黑体热辐射理论与小波分析应用研究。
* 广西自然科学基金项目(桂科技 0542046)资助。

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{N}N^m}\sum_{T_0+\cdots+T_{N-1}=m}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!},\ (0\leqslant k\leqslant (N-1)m). \qquad (8)$$

证明 对 $h_1(x)$ 作 Fourier变换得

$$\hat{h}(k) = \int_0^1 e^{-ikx}dx = \frac{1-e^{-ik}}{ik} = e^{-\frac{ik}{2}}\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}},$$

由于 $h_m(x)$ 是 $h_1(x)$ 的 m 卷积 $h_m(x) = (h_{m-1} * h_1)(x) = (h_1 * h_1 * \cdots * h_1)(x)$,所以

$$\hat{h}(k) = \left(\frac{1-e^{-ik}}{ik}\right)^m = e^{-\frac{imk}{2}}\left(\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}\right)^m,$$

$$\hat{h}_m(k) = \left(\frac{1-e^{-iNk}}{iNk}\right)^m = e^{-\frac{imNk}{2}}\left(\frac{\sin\frac{Nk}{2}}{\frac{Nk}{2}}\right)^m.$$

令

$$H_0(k) = \frac{\hat{h}_m(Nk)}{\hat{h}(k)} = \frac{\left(\frac{1-e^{-iNk}}{iNk}\right)^m}{\left(\frac{1-e^{-ik}}{ik}\right)^m} = \frac{e^{-\frac{imNk}{2}}\left(\frac{\sin\frac{Nk}{2}}{\frac{Nk}{2}}\right)^m}{e^{-\frac{imk}{2}}\left(\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}\right)^m} = e^{-\frac{im(N-1)k}{2}}\left(\frac{\sin\frac{Nk}{2}}{N\sin\frac{k}{2}}\right)^m =$$

$$\frac{e^{-\frac{im(N-1)k}{2}}}{N^m}\left(\frac{e^{\frac{iNk}{2}}-e^{-\frac{iNk}{2}}}{e^{\frac{ik}{2}}-e^{-\frac{ik}{2}}}\right)^m = \frac{1}{N^m}\left(\frac{1-e^{-iNk}}{1-e^{-ik}}\right)^m = \frac{1}{N^m}(1+e^{-ik}+\cdots+e^{-i(N-1)k})^m.$$

由引理1得

$$(1+e^{-ik}+\cdots+e^{-i(N-1)k})^m = \sum\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}1^{T_0}(e^{-ik})^{T_1}(e^{-i2k})^{T_2}\cdots(e^{-i(N-1)k})^{T_{N-1}} = \sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}e^{-ikk},$$

所以

$$H_0(k) = \frac{1}{N^m}\sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}e^{-ikk},$$

$$H_0\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N^m}\sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}e^{-ik\frac{k}{N}}.$$

由(2)式得

$$\hat{h}_m(k) = H_0\left(\frac{k}{N}\right)\hat{h}_m\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N^m}\sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}\cdot e^{-ik\frac{k}{N}}\hat{h}_m\frac{k}{N}. \qquad (9)$$

对(9)式两边取 Fourier逆变换得

$$h_m(x) = \frac{1}{N^m}\sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}\cdot$$

$$h_m(Nx-k) = \sqrt{N}\cdot\sum_{k=0}^{(N-1)m}\left(\frac{1}{\sqrt{N}N^m}\cdot\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!}\right)h_m(Nx-k).$$

令

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{N}N^m}\cdot\sum_{k=0}^{(N-1)m}\sum_{\substack{T_0+T_1+\cdots+T_{N-1}=m\\ T_1+2T_2+\cdots+(N-1)T_{N-1}=k}}\frac{m!}{T_0!T_1!\cdots T_{N-1}!},$$

则 $h_m(x) = \sqrt{N}\sum_{k=0}^{(N-1)m}h_k h_m(Nx-k)$,即对于任意 $N > 1$的整数, $h_m(x)$为 N带尺度函数.

由(8)式可以计算出

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 3^2}, h_1 = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^2}, h_2 = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3^2}, h_3 = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^2}, h_4 = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 3^2}.$$

再由(7)式得

$$h_2(x) = \sqrt{3}\sum_{k=0}^{4}h_k h_2(Nx-k) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 3^2}h_2(3x) + \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^2}h_2(3x-1) + \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3^2}h_2(3x-2) + \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^2}h_2(3x-3) + \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 3^2}h_2(3x-4)\right),$$

这就是 $N = 3$时,2阶样条函数 $h_2(x)$的表达式.

参考文献:

[1] 程正兴.小波分析算法与应用 [M].西安:西安交通大学出版社,1998.

[2] C西德尼·伯罗斯,拉米什 A戈皮那思,郭海涛.小波与小波变换导论 [M].北京:机械出版社,2005.

[3] 孙淑玲,许胤龙.组合数学 [M].合肥:中国科学技术大学出版社,2002.

(责任编辑: 韦廷宗)