

二元三次样条空间 $S_3^1(\Delta_W)$ 的 Hermite 插值*

Hermite Interpolation on Bivariate Cubic Spline Space $S_3^1(\Delta_W)$

陆伟平¹, 刘焕文²

LU Wei-ping, LIU Huan-wen

(1. 广西经济管理干部学院, 广西南宁 530007; 2. 广西民族大学数学与计算机科学学院, 广西南宁 530006)

(1. Guangxi Economic Management Cadre College, Nanning, Guangxi, 530007, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要: 利用 B-网坐标方法, 讨论 Wang 加密三角剖分 Δ_W 上二元三次样条空间 $S_3^1(\Delta_W)$ 的 Hermite 插值, 证明了插值的适定性, 并给出 $S_3^1(\Delta_W)$ 上具有局部支集的基函数.**关键词:** 加密三角剖分 二元三次样条函数 Hermite 插值 局部基

中图分类号: O241.3 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0374-07

Abstract By using technique of B-zier method, Hermite interpolation schemes are constructed based on cubic splines on Wang's refined triangulations. The existence and the uniqueness of the interpolation are discussed. The interpolant has local support and explicit representation.**Key words** refined triangulation, bivariate cubic spline, Hermite interpolation, local basis

设 K 为平面上任意一个单连通多边形区域, $\Delta = \{T^l\}_{l=1}^n$ 是它的任意一个正规三角剖分. 对满足 $0 \leq r < d$ 的非负整数 d, r , 定义二元 d 次 r 阶光滑样条函数空间为 $S_d^r(\Delta) = \{s \in C^r(K) : s|_{T^l} \in P_d, l=1, 2, \dots, n\}$, 其中 P_d 表示二元 d 次多项式空间, $s|_{T^l}$ 为二元样条函数 $s(x, y)$ 在 T^l 上的表达式.

很多学者在二元 Hermite 插值方面进行过研究. 文献 [1, 2] 研究 Clough-Tocher 加密三角剖分 Δ_{CT} 上的空间 $S_3^1(\Delta_{CT})$. 文献 [3] 研究 Powell-Sabin (I) 型和 (II) 型加密三角剖分下的空间 $S_2^1(\Delta_{PS1})$ 与 $S_2^1(\Delta_{PS2})$. 文献 [4] 构造 $S_2^1(\Delta_{PS2})$ 具有局部支集的基底. 文献 [5] 给出四方向网格剖分上具有最优逼近阶的 Hermite 插值. 文献 [6] 进一步给出三角化四边剖分上有最优逼近阶的 Hermite 插值. 文献 [7] 给出一类加密三角剖分 Δ_W 下 C^2 光滑的五次样条空间 $S_5^2(\Delta_W)$ 的维数和 Hermite 插值.

本文利用 B-网坐标方法, 讨论 Wang 加密三角剖分 Δ_W 下空间 $S_3^1(\Delta_W)$ 的 Hermite 插值及具有局部支集基底的构造, 给出 $S_3^1(\Delta_W)$ 具有局部支集的基函数.

1 三角形上二元三次多项式插值

给定非退化三角形 $T = [v_1, v_2, v_3]$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. $a = (T, U, V)$ 是 $X \in R^2$ 相应于 T 的重心坐标. 记 $\lambda_i = y_j - y_k$, $u_i = -(x_j - x_k)$, 其中 (i, j, k) 按照 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的顺序选取.

由文献 [8], 有定义在 T 上的二元 d 次多项式 p 有 B-网表示:

$$p = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} B_{ijk}^d(T, U, V) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} \frac{d!}{i!j!k!} T^i U^j V^k.$$

又由文献 [9] 有

$$p(v_1) = c_{300}, \quad (1)$$

$$D_x p(v_1) = \frac{3}{2S_{\Delta_{v_1 v_2 v_3}}} [\lambda_1 c_{300} + \lambda_2 c_{210} + \lambda_3 c_{201}], \quad (2)$$

$$D_y p(v_1) = \frac{3}{2S_{\Delta_{v_1 v_2 v_3}}} [-\lambda_1 c_{300} - 2c_{210} - 3c_{201}], \quad (3)$$

收稿日期: 2008-01-27

作者简介: 陆伟平 (1978-), 女, 硕士, 主要从事多元样条函数及其逼近研究.

* 广西自然科学基金 (批准号: 0575029) 和广西民族大学研究生教育创新项目 (gxunrchx0747) 资助.

$$D_{xx} p(v_1) = \frac{6}{(2S_{\Delta v_1 v_2 v_3})^2} [\lambda_1^2 c_{300} + \lambda_2^2 c_{120} + \lambda_3^2 c_{102} + \lambda_1 \lambda_3 c_{201} + \lambda_2 \lambda_1 c_{210} + \lambda_2 \lambda_2 c_{111}], \quad (4)$$

$$D_{yy} p(v_1) = \frac{6}{(2S_{\Delta v_1 v_2 v_3})^2} [c_{300} - c_{120} - c_{102} + c_{201} + c_{210} + c_{111}], \quad (5)$$

$$D_{xy} p(v_1) = \frac{6}{(2S_{\Delta v_1 v_2 v_3})^2} [\lambda_{1-1} c_{300} + \lambda_{2-2} c_{120} + \lambda_{3-3} c_{102} + (\lambda_{1-3} + \lambda_{3-1}) c_{201} + (\lambda_{2-1} + \lambda_{1-2}) c_{210} + (\lambda_{3-2} + \lambda_{2-3}) c_{111}]. \quad (6)$$

$$c_{300} = p_1, \quad (7)$$

$$c_{210} = p_1 + \frac{1}{3} D_x p_1 - \frac{1}{3} \lambda_3 D_y p_1, \quad (8)$$

$$c_{201} = p_1 - \frac{1}{3} D_x p_1 + \frac{1}{3} \lambda_2 D_y p_1, \quad (9)$$

$$f_4 = \frac{1}{27} (c_{300} + c_{303} + c_{033} + 3c_{210} + 3c_{120} + 3c_{201} + 3c_{102} + 3c_{012} + 3c_{021} + 6c_{111}), \quad (10)$$

其中 p_1 与 $(D_x p_1, D_y p_1)$ 分别是 p 在 v_1 的函数值和梯度向量, f_4 是 p 在 $(v_1 + v_2 + v_3)/3$ 的函数值.

引理 1^[8] 设 $T^{(1)} = [v_1, v_2, v_3]$, $T^{(2)} = [v_1, v_2, v_4]$ 为两个相邻三角形. $p_1, p_2 \in P_3$ 分别为分片多项式 $s(x, y)$ 在 $T^{(1)}$ 和 $T^{(2)}$ 上的表式, 令 $p_1 = \sum_{i+j+k=3} c_{ijk}^{[v_1, v_2, v_3]} B_{ijk}^3(\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{V}_1)$, $p_2 = \sum_{i+j+k=3} c_{ijk}^{[v_1, v_2, v_4]} B_{ijk}^3(\mathbb{T}, \mathbb{U}_2, \mathbb{V}_2)$, 其中 $(\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{V}_i)$ 分别为 (x, y) 相应于 $T^{(i)}$, $i=1, 2$ 的重心坐标. 则 $s(x, y) \in C^1(T^{(1)} \cup T^{(2)})$ 当且仅当

$$\begin{aligned} c_{j_0}^{[v_1, v_2, v_4]} &= c_{j_0}^{[v_1, v_2, v_3]}, i+j=3, \\ c_{j_1}^{[v_1, v_2, v_4]} &= \mathbb{T}_{j_1}^{[v_1, v_2, v_3]} + \mathbb{U}_{j_1}^{[v_1, v_2, v_3]} + \mathbb{V}_{j_1}^{[v_1, v_2, v_3]}, \\ i+j &= 2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $(\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{V})$ 是 v 相对于三角形 $T^{(1)}$ 的重心坐标.

2 空间 $S_3^1(\Delta W)$ 的 Hermite 插值

如图 1 所示, $T^{(l)} = [v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, v_3^{(l)}]$ 经 Wang 加密后得到的三角剖分记为 $T_W^{(l)}$, 并且记 $T_{l,0} = [w_1^{(l)}, w_2^{(l)}, w_3^{(l)}]$, $T_{l,2i-1} = [w_{i+}^{(l)}, w_{i+}^{(l)}, w_i^{(l)}]$, $T_{l,2i} = [w_{i+}^{(l)}, w_{i-}^{(l)}, w_i^{(l)}]$, $p_{l,0} = s|_{T_{l,0}}$, $p_{l,2i-1} = s|_{T_{l,2i-1}}$, $p_{l,2i} = s|_{T_{l,2i}}$, 其中 $i=1, 2, 3$. 设

$$p_{l,m} = \sum_{i+j+k=3} c_{ijk}^{(l,m)} B_{ijk}^3(\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{V}), m=0, 1, \dots, 6.$$

由于 $T_W^{(l)}$ 为拟贯穿剖分, 由文献 [10] 知道 $\dim S_3^1(T_W^{(l)}) = 16$.

设 $f \in C^1(T^{(l)})$, $v_i^{(l)} = (x_i, y_i)$, $w_i^{(l)} = (x_i', y_i')$, $i=1, 2, 3$. 在三角剖分 $T_W^{(l)}$ 上考虑插值问题: 寻找

$s \in S_3^1(T_W^{(l)})$, 使其满足

$$s(v_i^{(l)}) = f(v_i^{(l)}) := f_i, \quad (12)$$

$$D_x s(v_i^{(l)}) = D_x f(v_i^{(l)}) := D_x f_i, \quad (13)$$

$$D_y s(v_i^{(l)}) = D_y f(v_i^{(l)}) := D_y f_i, \quad (14)$$

$$s(w_i^{(l)}) = f(w_i^{(l)}) := g_i, \quad (15)$$

$$D_{\vec{n}_i} s(v_{i+}^{(l)}) = D_{\vec{n}_i} f(v_{i+}^{(l)}) := p_i, \quad (16)$$

$$s((w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3) = f((w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3) := f_4, \quad (17)$$

其中 $i=1, 2, 3$, 而 $D_{\vec{n}_i} s(v_{i+}^{(l)})$ 表示 s 在边 $[v_i^{(l)}, v_{i+}^{(l)}]$ 的中点 $v_{i+}^{(l)}$ 的法向导数.

定理 1 设 $f \in C^1(T^{(l)})$, 则插值问题 (12)~(17) 的解是存在唯一的.

证明 利用 (7)~(9) 式, 有 (12)~(14) 式, 相应的齐插值条件等价于 $c_{300}^{(l,2i)} = 0$, $c_{201}^{(l,2i)} = 0$, $c_{102}^{(l,2i)} = 0$, $i=1, 2, 3$. 由引理 1 得到 $D_1(v_i^{(l)})$ ($i=1, 2, 3$) 的区域点对应的 B-网坐标都为 0, 如图 2 阴影部分所示.

(15) 式相应的齐插值条件等价于 $c_{300}^{(l,0)} = 0$, $c_{210}^{(l,0)} = 0$, $c_{201}^{(l,0)} = 0$. (16) 式相应的齐插值条件等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{8S_{T_{l,5}}} [(\lambda_1 \lambda_{3+} - \lambda_{-1-3}) c_{300}^{(l,5)} + (\lambda_2 \lambda_{3+} - \lambda_{-2-3}) c_{300}^{(l,5)} + [(\lambda_1 - \lambda_3) \lambda_{3+} - (\lambda_{-1-3})_{-3}] c_{210}^{(l,5)} + (\lambda_{3+}^2 - \lambda_{-3}^2) c_{201}^{(l,5)} + (\lambda_{3+}^2 - \lambda_{-3}^2) c_{201}^{(l,5)} + [(\lambda_2 - \lambda_3) \lambda_{3+} - (\lambda_{-2-3})_{-3}] c_{102}^{(l,5)} + 2(\lambda_{3+}^2 - \lambda_{-3}^2) c_{111}^{(l,5)}], \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $S_{T_{l,5}}$ 表示三角形 $T_{l,5}$ 的面积, $\lambda_1 = y_2 - y_3$, $\lambda_2 = y_3 - y_1$, $\lambda_3 = y_1 - y_2$; $\lambda_{-1} = x_3 - x_2$, $\lambda_{-2} = x_1 - x_3$, $\lambda_{-3} = x_2 - x_1$.

将 $c_{j_0}^{(l,5)} = 0$, $i+j=3$, $c_{201}^{(l,5)} = c_{210}^{(l,5)} = 0$ 代入 (18) 式, 得出 $c_{111}^{(l,5)} = 0$. 同理可以得到 $c_{111}^{(l,2i-1)} = 0$, $i=1, 2$. 又由 (10) 式, 可以知道 (17) 式相应的齐插值条件等价于

$$\sum_{i=1}^3 [c_{012}^{(l,2i)} + c_{021}^{(l,2i)}] + 2c_{111}^{(l,0)} = 0. \quad (19)$$

$w_{i+}^{(l)}$ 相应于 $\Delta v_{i+}^{(l)} w_{i+}^{(l)} w_i^{(l)}$ 的重心坐标为 $(0, -1, 2)$, $i=1, 2, 3$. 由沿 $[v_{i+}^{(l)}, w_i^{(l)}]$ 的 C^1 光滑条件得到

$$c_{111}^{(l,2i-1)} = 2c_{102}^{(l,2i)} - c_{111}^{(l,2i)}. \quad (20)$$

$w_{i-}^{(l)}$ 相应于 $\Delta v_{i-}^{(l)} w_{i-}^{(l)} w_i^{(l)}$ 的重心坐标为 $(-2, 4, -1)$, $i=1, 2, 3$. 由沿 $[w_{i-}^{(l)}, w_{i+}^{(l)}]$ 的 C^1 光滑条件得

$$c_{111}^{(l,2i-1)} = -2c_{210}^{(l,2i)} + 4c_{120}^{(l,2i)} - c_{111}^{(l,2i)}. \quad (21)$$

$w_{i+}^{(l)}$ 相应于 $\Delta w_i^{(l)} w_{i+}^{(l)} w_{i-}^{(l)}$ 的重心坐标为 $(0, 2, -1)$, $i=1, 2, 3$. 由沿 $[w_i^{(l)}, w_{i+}^{(l)}]$ 的 C^1 光滑条件得

$$\begin{aligned} c_{120}^{(l,2i)} &= 2c_{030}^{(l,2i)} - c_{012}^{(l,2i)}, c_{111}^{(l,2i)} = 2c_{021}^{(l,2i)} - c_{111}^{(l,0)}, \\ c_{102}^{(l,2i)} &= 2c_{012}^{(l,2i)} - c_{021}^{(l,2i)}. \end{aligned} \quad (22)$$

联立 (19)~(22) 式得到 $AC=0$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{102}^{(l,2)} \\ c_{120}^{(l,2)} \\ c_{111}^{(l,2)} \\ c_{021}^{(l,2)} \\ c_{012}^{(l,2)} \\ c_{102}^{(l,4)} \\ c_{120}^{(l,4)} \\ c_{111}^{(l,4)} \\ c_{021}^{(l,4)} \\ c_{012}^{(l,4)} \\ c_{102}^{(l,6)} \\ c_{120}^{(l,6)} \\ c_{111}^{(l,6)} \\ c_{021}^{(l,6)} \\ c_{012}^{(l,6)} \\ c_{111}^{(l,0)} \end{bmatrix}.$$

由于 $\det(A) = -14976 \neq 0$, 所以方程组仅有 $AC = 0$ (零解, 即余下的 B网坐标全为零, 因而插值问题的解唯一).

由文献 [11], 有 $\dim S_3^1(\Delta_w) = 3|V| + |E| + 4|T|$.

在 Δ_w 上考虑插值问题: 寻找 $s \in S_3^1(\Delta_w)$, 使其满足

$$s(v) = f(v) := f_i, i = 1, 2, \dots, |V|, \quad (23)$$

$$D_x s(v_i) = D_x f(v) := D_x f_i, i = 1, 2, \dots, |V|, \quad (24)$$

$$D_y s(v_i) = D_y f(v) := D_y f_i, i = 1, 2, \dots, |V|, \quad (25)$$

$$s(w_i^{(l)}) = f(w_i^{(l)}) := g_i^{(l)}, i = 1, 2, 3, l = 1, 2, \dots, |T|, \quad (26)$$

$$D_{\bar{n}_i} s(e_{j, \frac{1}{2}}) = D_{\bar{n}_i} f(e_{j, \frac{1}{2}}) := p_j, j = 1, 2, \dots, |E|, \quad (27)$$

$$s((w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3) = f((w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3) := f_4^{(l)}, l = 1, 2, \dots, |T|, \quad (28)$$

其中 $e_{j, \frac{1}{2}}$ 表示 Δ 的边 e 的中点.

定理 2 设 $f \in n C^1(K)$, 则插值问题 (23)~(28) 的解存在唯一.

证明 由 (7)~(9) 式, 有 (23)~(25) 式相应的齐插值条件等价于对原三角剖分 Δ 每个顶点 $v \in V$, $D_1(v)$ 内不共线的三个区域点对应的 B网坐标为零. 由 C^1 光滑条件, 有 $D_1(v)$ 内其它区域点对应的 B网坐标也为零. 由 (7) 式可以知道 (26) 式相应的齐插值条件等价于 $c_{300}^{(l,0)} = 0, c_{030}^{(l,0)} = 0, c_{003}^{(l,0)} = 0, l = 1, 2, \dots, |T|$. 由 (27) 式相应的齐插值条件, 可以知道原三角剖分 Δ 的每条边 $e \in E$ 上一个区域点的 B网坐标为零. 而 (28) 式对应的齐插值条件等价于

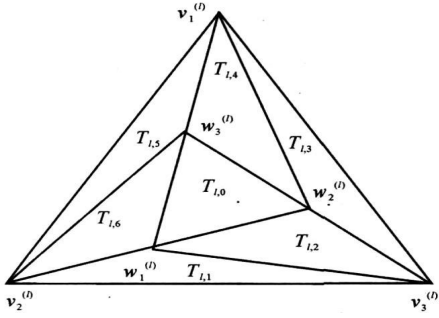


图 1 三角剖分 $T_W^{(l)}$
Fig. 1 The refined triangulation $T_W^{(l)}$

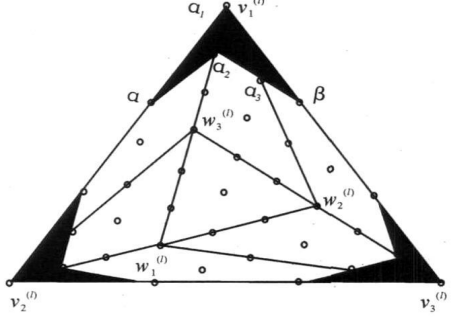


图 2 $S_3^1(T_W^{(l)})$ 的 B网坐标
Fig. 2 The B-net ordinates of $S_3^1(T_W^{(l)})$

给定三角剖分 Δ , 对其进行 Wang 加密后得到的三角剖分记为 $\Delta_w = \cup_{l=1}^{|T|} T_W^{(l)}$. 以 $v_i, i = 1, 2, \dots, |V|; e_j, j = 1, 2, \dots, |E|$ 和 $T^{(l)}, l = 1, 2, \dots, |T|$ 分别表示 Δ 的顶点和边, 以 $v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, v_3^{(l)}$ 表示顶点的三角形单元.

(19)式,其中 $l=1, 2, \dots, |T|$. 由定理 1, 可以知道原三角剖分 Δ 的每个三角形 $T^{(l)}$ 内余下的 B 网坐标全为零, 因而插值问题 (23)~ (28) 的解存在唯一.

3 $S_3^1(\Delta_W)$ 上具有局部支集的基底

设 $W = \{w\}$ 表示剖分 $T^{(l)}$, $l=1, 2, \dots, |T|$ 的内点集, $G = \{(w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3\}$ 表示三角形 $[w_1^{(l)} w_2^{(l)} w_3^{(l)}]$, $l=1, 2, \dots, |T|$ 重心的集合. 构造空间 $S_3^1(\Delta_W)$ 具有局部支集的基底, 包括三个顶点样条 $V_{v,s}$, 其中 $s = (s^1, s^2) \in \Gamma = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, 边样条 $V_e (e \in E)$, 样条 $V_w (w \in W)$ 和样条 $V_g (g \in G)$. 由插值条件, 顶点样条 $V_{v,s}$ 可以定义为

$$D^t V_{v,s}(u) = W_{u, s} \delta_{t,0}, \quad t \in \Gamma, \quad u \in V, \quad (29)$$

$$D_e^{(1,1)} V_{v,s}(v_{e,1}) = 0, \quad e \in E, \quad (30)$$

$$V_{v,s}(w) = 0, \quad w \in W, \quad (31)$$

$$V_{v,s}(a) = 0, \quad a \in G, \quad (32)$$

其中 $D^t f(x, y) = D^{t_1} D^{t_2} f(x, y)$, $D_e^{t,1} f(x, y) = (D_{v_e - v_{e,1}})^{t_1} (D_{v_{e,2} - v_{e,1}})^{t_2} f(x, y)$, $t = (t_1, t_2) \in Z^2$, $W_{u,s}$ 为 Kronecker delta 函数.

1) 考虑顶点样条 $V_{v,(0,0)}$. 将 $V_{v,(0,0)}$ 限制在 $\Delta v_1^{(l)} v_2^{(l)} w_3^{(l)}$ 上, 容易知道 (29) 式等价于 $T_1 = 1, (y_2 - y_3') T_1 + (y_3' - y_1) T_1 + (y_1 - y_2) T_2 = 0, (x_3' - x_2) T_1 + (x_1 - x_3') T_1 + (x_2 - x_1) T_2 = 0$, 其中 $T, U, V, Z, T_i, i=1, 2, 3$ (如图 2).

将 $V_{v,(0,0)}$ 限制在 $\Delta v_1^{(l)} w_3^{(l)} w_2^{(l)}$ 上, 则 (29) 式等价于 $T_1 = 1, (y_3' - y_2') T_1 + (y_2' - y_1) T_2 + (y_1 - y_3') T_3 = 0, (x_2' - x_3') T_1 + (x_1 - x_2') T_2 + (x_3' - x_1) T_3 = 0$.

将 $V_{v,(0,0)}$ 限制在 $\Delta v_1^{(l)} w_2^{(l)} v_3^{(l)}$ 上, 则 (29) 式等价于 $T_1 = 1, (y_2' - y_3) T_1 + (y_3 - y_1) T_3 + (y_1 - y_2') U = 0, (x_3 - x_2') T_1 + (x_1 - x_3) T_3 + (x_2' - x_1) U = 0$.

由上可见, 不管哪种情况都有 $T = U = T_i = 1, i=1, 2, 3$.

不失一般性, 假设图 2 中三角形 $\Delta v_1^{(l)} v_2^{(l)} w_3^{(l)}$ 的面积比与它有公共边 $[v_1^{(l)}, v_2^{(l)}]$ 的三角形面积大, 则顶点 v_e 可以取为 $w_3^{(l)}$, 条件 (30) 可以转化为 $D_{v_2^{(l)} - v_1^{(l)}} D_{w_3^{(l)} - v_1^{(l)}} V_{v,(0,0)}(v_1^{(l)}) = 0$, 等价于

$$(x_2 - x_1)(x_3' - x_1) D_x D_x V_{v,(0,0)}(v_1^{(l)}) + (x_2 - x_1)(y_3' - y_1) D_x D_y V_{v,(0,0)}(v_1^{(l)}) + (x_3' - x_1)(y_2 - y_1) D_x D_y V_{v,(0,0)}(v_1^{(l)}) + (y_2 - y_1)(y_3' - y_1) D_y D_y V_{v,(0,0)}(v_1^{(l)}) = 0 \quad (33)$$

由 (4)~ (6) 式, 可以知道 (33) 式可以转化为 $T_1 - T_2 + V = 0$, 所以 $V = 1$. 同理也能决定 Z .

由 (1) 式知道 (31) 式可以化简为 $c_{300}^{(l,0)} = 0, c_{30}^{(l,0)}$

$= 0, c_{003}^{(l,0)} = 0$. 由 (10) 式, 得到 (32) 式可以转化为 (19) 式. 再由 C^1 光滑条件还可以得到 $AC = B^T$, 其中 $B = [0, Z, V, Z, \sqrt{2}, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. 于是求解得出

$$a_1 = \frac{47V}{234} - \frac{109Z}{234} + \frac{22}{117}, \quad a_2 = \frac{47V}{468} - \frac{2Z}{117} + \frac{11}{117},$$

$$a_3 = \frac{47V}{117} - \frac{109Z}{117} + \frac{44}{117}, \quad a_4 = \frac{31V}{117} - \frac{47Z}{117} + \frac{34}{117},$$

$$a_5 = \frac{31V}{468} - \frac{47Z}{468} + \frac{17}{234}, \quad a_6 = -\frac{109V}{234} + \frac{43Z}{117} - \frac{56}{117},$$

$$a_7 = \frac{2V}{117} - \frac{31Z}{468} + \frac{61}{234}, \quad a_8 = -\frac{109V}{117} - \frac{31Z}{117} - \frac{112}{117},$$

$$a_9 = -\frac{47V}{117} - \frac{8Z}{117} - \frac{44}{117}, \quad a_{10} = -\frac{47V}{468} - \frac{2Z}{117} - \frac{11}{117},$$

$$a_{11} = \frac{43V}{117} + \frac{47Z}{234} - \frac{17}{117}, \quad a_{12} = -\frac{31V}{468} + \frac{47Z}{468} - \frac{17}{234},$$

$$a_{13} = -\frac{31V}{117} + \frac{47Z}{117} - \frac{34}{117}, \quad a_{14} = -\frac{8V}{117} + \frac{31Z}{117} - \frac{5}{117},$$

$$a_{15} = -\frac{2V}{117} + \frac{31Z}{468} - \frac{61}{234}, \quad a_{16} = \frac{5V}{39} + \frac{5Z}{39} + \frac{8}{39},$$

其中 $c_{102}^{(l,2k+2)}, c_{120}^{(l,2k+2)}, c_{111}^{(l,2k+2)}, c_{021}^{(l,2k+2)}, c_{012}^{(l,2k+2)}$ 分别等于 $a_{5+i}, a_{5+i+2}, a_{5+i+3}, a_{5+i+4}, a_{5+i+5}, i=0, 1, 2, c_{111}^{(l,0)} = a_{16}$, 如图 3 所示.

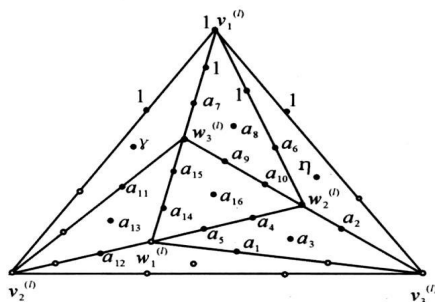


图 3 $V_{v,(0,0)}$ 的 B 网坐标

Fig. 3 The B-net ordinates of $V_{v,(0,0)}$

°: 相应区域点的 B 网坐标为零. °: B-net ordinates are vanished.

由图 3 可以看出, 若 $\Delta v_1^{(l)} v_2^{(l)} w_3^{(l)}$ (或 $\Delta v_1^{(l)} w_2^{(l)} v_3^{(l)}$) 的面积比与它有公共边 $[v_1^{(l)}, v_2^{(l)}]$ (或 $[v_1^{(l)}, v_3^{(l)}]$) 的三角形的面积大, 则 $V = 1$ (或 $Z = 1$), 否则 V (或 Z) 由沿边 $[v_1^{(l)}, v_2^{(l)}]$ (或 $[v_1^{(l)}, v_3^{(l)}]$) 的光滑条件决定.

2) 考虑顶点样条 $V_{v,(1,0)}$. 类似 1) 的讨论, 有 $T_1 = 0, T_2 = \frac{x_3' - x_1}{3}, T_3 = \frac{x_2' - x_1}{3}, T = \frac{x_2 - x_1}{3}, U = \frac{x_3 - x_1}{3}$. 将 (30) 式化简后得到 $V = \frac{x_2 + x_3' - 2x_1}{3}$. 同理得到 $Z = \frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{3}$. (31) 式和 (32) 式的化简同理 1). 再由 C^1 光滑条件还可以得到 $AC = B^T$, 其中 $B = [0, Z, V, Z, \sqrt{2}, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. 求解得到

$$\begin{aligned}
 a^1 &= \frac{47V}{234} - \frac{109Z}{234} + \frac{22E}{117}, & a^2 &= \frac{47V}{468} + \frac{2Z}{117} + \frac{11E}{117}, \\
 a^3 &= \frac{47V}{117} - \frac{109Z}{117} + \frac{44E}{117}, & a^4 &= \frac{31V}{117} - \frac{47Z}{117} + \frac{34E}{117}, \\
 a^5 &= \frac{31V}{468} - \frac{47Z}{468} + \frac{17E}{234}, & a^6 &= -\frac{109V}{234} + \frac{43Z}{117} - \frac{56E}{117}, \\
 a^7 &= \frac{2V}{117} - \frac{31Z}{468} + \frac{61E}{234}, & a^8 &= -\frac{109V}{117} - \frac{31Z}{117} - \frac{112E}{117}, \\
 a^9 &= -\frac{47V}{117} - \frac{8Z}{117} - \frac{44E}{117}, & a^{10} &= -\frac{47V}{468} - \frac{2Z}{117} - \frac{11E}{117}, \\
 a^{11} &= \frac{43V}{117} + \frac{47Z}{234} - \frac{17E}{117}, & a^{12} &= -\frac{31V}{468} + \frac{47Z}{468} - \frac{17E}{234}, \\
 a^{13} &= -\frac{31V}{117} + \frac{47Z}{117} - \frac{34E}{117}, & a^{14} &= -\frac{8V}{117} + \frac{31Z}{117} - \frac{5E}{117}, \\
 a^{15} &= -\frac{2V}{117} + \frac{31Z}{468} - \frac{61E}{234}, & a^{16} &= \frac{5V}{39} + \frac{5Z}{39} + \frac{8E}{39},
 \end{aligned}$$

如图 4 所示。

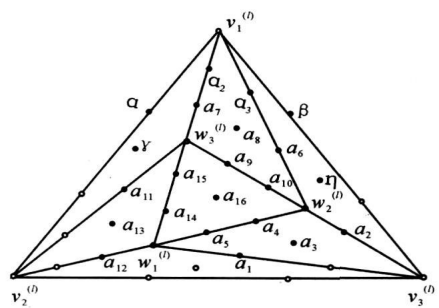


图 4 $V_{v_1(1,0)} V_{v_2(0,1)}$ 的 B 网坐标
 Fig. 4 The B-net ordinates of $V_{v_1(1,0)} V_{v_2(0,1)}$

°: 相应区域点的 B 网坐标为零. °: B-net ordinates are vanished.

3) 考虑顶点样条 $V_{v_1(0,1)}$. 类似 1) 的讨论, 有 $T_1 = 0, T_2 = \frac{y_3 - y_1}{3}, T_3 = \frac{y_2 - y_1}{3}, T = \frac{y_2 - y_1}{3}, U = \frac{y_3 - y_1}{3}$. 将 (30) 式化简后得到 $V = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{3}$. 同理得到 $Z = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{3}$. (31) 式和 (32) 式的化简同理

1). 再由 C^1 光滑条件还可以得到 $AC = B^T$, 其中 $B = [0, Z, V, Z, V, 2E, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. 求解得到 C 的值与 2) 相同, 如图 4 所示.

4) 由插值条件, 边样条 V_e 可以定义为

$$\begin{aligned}
 D V_e(u) &= 0, \quad u \in \Gamma, \quad u \in V, & (34) \\
 D_e^{(1,1)} V_e(v_{c,1}) &= W_{c,e}, \quad c = [v_{c,1}, v_{c,2}] \in E, & (35) \\
 V_e(w) &= 0, \quad w \in W, & (36) \\
 V_e(a) &= 0, \quad a \in G. & (37)
 \end{aligned}$$

类似 1) 的推导, (34) 式可化简为 $c_{300}^{(l)} = 0, c_{210}^{(l)} = 0, c_{201}^{(l)} = 0$. 换句话说, 对任意 $v \in V, D_1(v)$ 的区域点对应的 B 网坐标全为零.

对 $c = [v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}] \in \Delta$, 考虑 (35) 式. 显然, Δ_W 内存在两个三角形包含公共边 c , 选择面积相对较

大的一个, 否则任选一个, 记为 $[v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}]$. 如果 c 是边界边, 则只有一个三角形 $[v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}]$ 包含 c . 记 $v_{c,1}^{(l)} = (x_{c,1}, y_{c,1}), v_{c,2}^{(l)} = (x_{c,2}, y_{c,2}), v_c^{(l)} = (x_c, y_c)$, 则条件 (35) 转化为 $D_{v_{c,1}^{(l)}} - v_{c,1}^{(l)} D_{v_{c,2}^{(l)}} - v_{c,2}^{(l)} D_{v_c^{(l)}} V_e(v_{c,1}^{(l)}) = W_{c,e}$, 等价于

$$\begin{aligned}
 (x_{c,2} - x_{c,1})(x_c - x_{c,1}) D_x D_x V_e(v_{c,1}) + (x_c - x_{c,1})(y_{c,2} - y_{c,1}) D_x D_y V_e(v_{c,1}) + (x_{c,2} - x_{c,1})(y_c - y_{c,1}) D_x D_y V_e(v_{c,1}) + (y_c - y_{c,1})(y_{c,2} - y_{c,1}) D_y D_y V_e(v_{c,1}) = W_{c,e}. & (38)
 \end{aligned}$$

由 (4)~(6) 式, (38) 式可以化为 $c_{300}^{(l)} - c_{201}^{(l)} - c_{210}^{(l)} + c_{111}^{(l)} = \frac{W_{c,e}}{6}$.

因为 $c_{300}^{(l)} = 0, c_{210}^{(l)} = 0, c_{201}^{(l)} = 0$, 所以 $c_{111}^{(l)} = \frac{W_{c,e}}{6}$,

即 $Z = \frac{W_{c,e}}{6}$, (36) 式和 (37) 式的化简同理. 若将 $v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}, v_{c,1}^{(l)}$ 分别对应图 2 中的 $v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, v_3^{(l)}$, 再由 C^1 光滑条件还可以得出 $AC_1 = B^T$, 其中 $C_1 = C, B = [0, Z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. 于是求解得出 $a^1 = -\frac{109}{234}Z, a^2 = \frac{2}{117}Z, a^3 = -\frac{109}{117}Z, a^4 = -\frac{47}{117}Z, a^5 = -\frac{47}{468}Z, a^6 = \frac{43}{117}Z, a^7 = -\frac{31}{468}Z, a^8 = -\frac{31}{117}Z, a^9 = -\frac{8}{117}Z, a^{10} = -\frac{2}{117}Z, a^{11} = \frac{47}{234}Z, a^{12} = \frac{47}{468}Z, a^{13} = \frac{47}{117}Z, a^{14} = \frac{31}{117}Z, a^{15} = \frac{31}{468}Z, a^{16} = \frac{15}{117}Z$.

由沿边 $[v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}]$ 的 C^1 光滑条件, 有 $a = -\frac{S_{\Delta_{v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, w_1^{(l)}}}}{S_{\Delta_{v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}}}} Z$ 将 $v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}, v_1^{(l)}$ 分别对应图 2 中的 $v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, v_3^{(l)}$, 再由 C^1 光滑条件, 还可以得到 $AC_2 = B^T$, 其中 $C_2 = C, B = [0, 0, a, 0, a, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, 即 $b_1 = -\frac{47}{234}a, b_2 = \frac{47}{468}a, b_3 = \frac{47}{117}a, b_4 = \frac{31}{117}a, b_5 = \frac{31}{468}a, b_6 = -\frac{109}{234}a, b_7 = \frac{2}{117}a, b_8 = -\frac{109}{117}a, b_9 = -\frac{47}{117}a, b_{10} = -\frac{47}{468}a, b_{11} = \frac{43}{117}a, b_{12} = -\frac{31}{468}a, b_{13} = -\frac{31}{117}a, b_{14} = -\frac{8}{117}a, b_{15} = -\frac{2}{117}a, b_{16} = \frac{15}{117}a$. 由此可以得到, 边样条 $V_e(x, y)$ 的支集和相关的 B 网坐标, 如图 5 所示.

若 $\Delta_{v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, w_1^{(l)}}$ 的面积比与它有公共边 $[v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}]$ 的三角形面积大, 则 $Z = \frac{1}{6}W_{c,e}, a = -\frac{S_{\Delta_{v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, w_1^{(l)}}}}{S_{\Delta_{v_{c,1}^{(l)}, v_{c,2}^{(l)}, v_c^{(l)}}}} Z$ 另外.

$$V_g(Z) = W_{g, \mathcal{Z}} \in G. \quad (46)$$

容易知道 (43) 式的推导同理 4), (44) 式和 (45) 式的化简同理 1). 由 (10) 式和 (46) 式得出 $V_g((w_1^{(l)} + w_2^{(l)} + w_3^{(l)})/3) = 1$, 化简为 $\sum_{i=1}^3 [c_{012}^{(l,2i)} + c_{021}^{(l,2i)}] + 2c_{111}^{(l,0)} = 9$.

再由 C^1 光滑条件还可以得出 $AC = B^T$, 其中 $B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9]$. 因此 $a_1 = -\frac{6}{13}, a_2 = -\frac{3}{13}, a_3 = -\frac{12}{13}, a_4 = \frac{12}{13}, a_5 = \frac{3}{13}, a_6 = -\frac{6}{13}, a_7 = -\frac{3}{13}, a_8 = -\frac{12}{13}, a_9 = \frac{12}{13}, a_{10} = \frac{3}{13}, a_{11} = -\frac{6}{13}, a_{12} = -\frac{3}{13}, a_{13} = -\frac{12}{13}, a_{14} = \frac{12}{13}, a_{15} = \frac{3}{13}, a_{16} = \frac{36}{13}$. 由此可以得出样条 $V_g(x, y)$ 的支集和相关的 B 网坐标, 如图 7 所示.

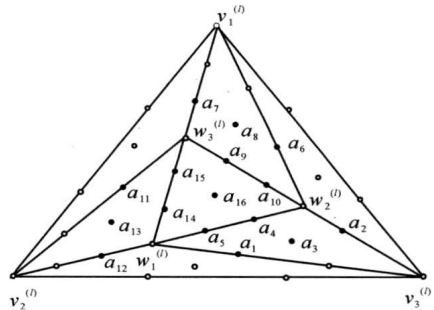


图 7 V_g 的 B 网坐标

Fig. 7 The B-net ordinates of V_g

°: 相应区域点的 B 网坐标为零. °: B-net ordinates are vanished.

4 顶点样条算例

不妨考虑一种特殊的情形, 设过顶点 v 的三角形为 $\triangle_{v_1v_2}, \triangle_{v_1v_2v_3}, \triangle_{v_1v_3v_4}, \triangle_{v_1v_4v_1}$ 且 v, v_1, v_2, v_3, v_4 的坐标分别为 $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$. 对每一个三角形进行 Wang 加密, 如图 8 所示. 加密后得到: $\triangle_{v_1v_1v_2}$ 中 3 个点 u_1, w_1, w_2 的坐标依次为 $(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}), (\frac{1}{7}, \frac{4}{7}), (\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$; $\triangle_{v_1v_2v_3}$ 中 3 个点 u_2, w_2', w_3 的坐标依次为 $(-\frac{2}{7}, \frac{4}{7}), (-\frac{4}{7}, \frac{1}{7}), (-\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$; $\triangle_{v_1v_3v_4}$ 中 3 个点 u_3, w_3', w_4 的坐标依次为 $(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}), (-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}), (-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7})$; $\triangle_{v_1v_4v_1}$ 中 3 个点 u_4, w_4', w_1' 的坐标依次为 $(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}), (\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}), (\frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$. 设集合 $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_2, w_3, w_4, w_1', w_2', w_3', w_4'\}$, 集合 G 表示这四个三角形 $\triangle_{v_1v_1v_2},$

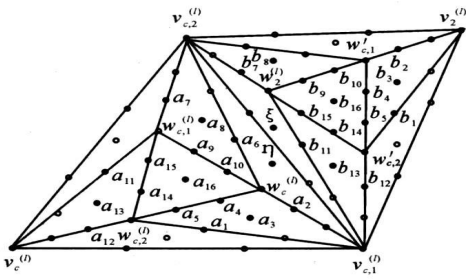


图 5 $V_e(x, y)$ 的 B 网坐标

Fig. 5 The B-net ordinates of $V_e(x, y)$

°: 相应区域点的 B 网坐标为零. °: B-net ordinates are vanished.

5) 由插值条件, 样条 V_w 可以定义为

$$D^l V_w(u) = 0, \quad u \in \Gamma, \quad (39)$$

$$D_e^{(1,1)} V_w(v_{e,1}) = 0, \quad e \in E, \quad (40)$$

$$V_w(a) = W_{w, a} \in W, \quad (41)$$

$$V_w(a) = 0, \quad a \in G. \quad (42)$$

(39) 式的推导同理 4). (40) 式与 (42) 式的化简同理 1). 如果 $V_w(x, y)$ 限制在三角形 $[w_1^{(l)}, w_2^{(l)}, w_3^{(l)}]$ 上, 由 (1) 式, 再将 (41) 式化简, 得到 $c_{300}^{(l,0)} = 1$. 再由 C^1 光滑条件还可以得到出 $AC = B^T$, 其中 $B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, -1/3]$. 求解得 $a_1 = \frac{70}{117}, a_2 = \frac{35}{117}, a_3 = \frac{140}{117}, a_4 = \frac{16}{117}, a_5 = \frac{121}{117}, a_6 = -\frac{86}{117}, a_7 = -\frac{43}{117}, a_8 = -\frac{172}{117}, a_9 = -\frac{140}{117}, a_{10} = -\frac{35}{117}, a_{11} = \frac{226}{117}, a_{12} = \frac{113}{117}, a_{13} = \frac{452}{117}, a_{14} = \frac{172}{117}, a_{15} = \frac{43}{117}, a_{16} = -\frac{12}{13}$. 由此可以得到, 样条 $V_w(x, y)$ 的支集和相关的 B 网坐标, 如图 9 所示.

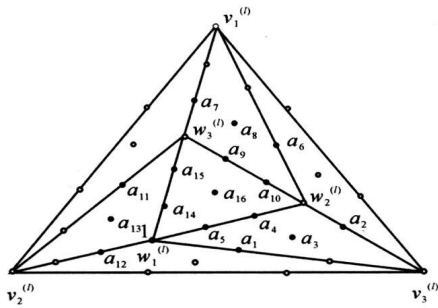


图 6 V_w 的 B 网坐标

Fig. 6 The B-net ordinates of V_w

°: 相应区域点的 B 网坐标为零. °: B-net ordinates are vanished.

6) 由插值条件, 样条 V_g 可以定义为

$$D^l V_g(u) = 0, \quad u \in \Gamma, \quad (43)$$

$$D_e^{(1,1)} V_g(v_{e,1}) = 0, \quad e \in E, \quad (44)$$

$$V_g(w) = 0, \quad w \in W, \quad (45)$$

$\triangle_{v_1v_2v_3}, \triangle_{v_1v_3v_4}, \triangle_{v_1v_4v_1}$ 重心的集合. 讨论在顶点处的顶点基样条 $V_{v,(0,0)}$.

设在顶点处的顶点基样条由插值条件定义为

$$V_{v,(0,0)}(v) = 1, D_x V_{v,(0,0)}(v) = 0, D_y V_{v,(0,0)}(v) = 0, \quad (47)$$

$$V_{v,(0,0)}(v_i) = 1, D_x V_{v,(0,0)}(v_i) = 0, D_y V_{v,(0,0)}(v_i) = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4); \quad (48)$$

$$D_e^{(1,1)} V_{v,(0,0)} = 0, e \in E; \quad (49)$$

$$V_{v,(0,0)}(w) = 0, w \in W; \quad (50)$$

$$V_{v,(0,0)}(a) = 0, a \in G. \quad (51)$$

将 $V_{v,(0,0)}$ 限制在以 v 为顶点的三角形时, 由 (47) 式得出 $D_1(1)$ 内的区域点对应的 B 网坐标为 1; 由 (48) 式得出 $D_1(v_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 内的区域点对应的 B 网坐标为 0; 由 (50) 式得到集合 W 中的区域点对应的 B 网坐标为 0; (51) 式等价于 (19) 式. 若 $\triangle_{v_1v_2u_1}, \triangle_{v_2v_3u_2}, \triangle_{v_3v_4u_3}, \triangle_{v_4v_1u_4}$ 的面积均比与它们有公共边的三角形面积大, 公共边分别为 $[v_1v_2], [v_2v_3], [v_3v_4], [v_4v_1]$, 则条件 (49) 等价于 $C_{111}^{[v_1v_2u_1]} = C_{111}^{[v_2v_3u_2]} = C_{111}^{[v_3v_4u_3]} = C_{111}^{[v_4v_1u_4]} = 0$.

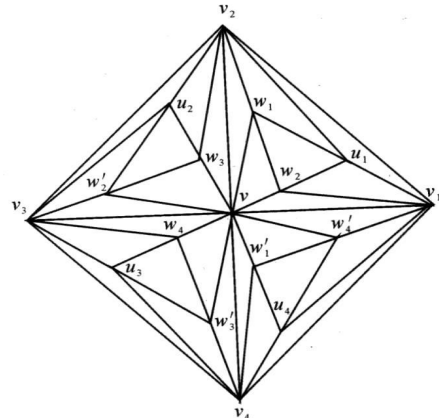


图 8 Wang 加密以 v 为顶点的三角形

Fig. 8 The Wang's refined triangulation of the triangles sharing the common vertex v

对于条件 (49) 再分类讨论, 先看 $\triangle_{vv_1v_2}$. 若 $\triangle_{vv_1w_2}$ 的面积比 $\triangle_{vv_1w_1}$ 的面积大, 则由 (33) 式有 $C_{111}^{[w_1w_2]} = 1$, 同理若 $\triangle_{vv_2w_1}$ 的面积比 $\triangle_{vv_2w_3}$ 的面积大, 则 $C_{111}^{[vv_2w_1]} = 1$; 若 v, v_1, v_2 分别对应图 2 中的 $v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, v_3^{(l)}$, 由 C^1 光滑条件及构造等点样条时的公式, 其余

区域点对应的 B 网坐标 a_1, \dots, a_6 即可以得到, 依次为 $[-\frac{1}{13}, \frac{11}{52}], [-\frac{2}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{16}], [-\frac{1}{26}, \frac{11}{52}], [-\frac{28}{13}, -\frac{11}{13}], [-\frac{11}{52}, \frac{11}{26}], [-\frac{1}{26}], [-\frac{2}{13}, \frac{2}{13}], [-\frac{11}{52}, \frac{6}{13}]$. 类似地可以研究其余三角形内的 B 网坐标. 在顶点 v 处的顶点基样条 $V_{v,(1,0)}, V_{v,(0,1)}$ 的 B 网坐标同理可以得出.

参考文献:

- [1] Ciarlet P G. Sur l'element de clough et tocher [J]. Rev Francaise Auto Int Rech Oper, 1974, 8: 19-27.
- [2] Percell P. On cubic and quartic Clough-Tocher finite elements [J]. SIAM J Numer Anal, 1976, 13: 100-103.
- [3] Powell M J D, Sabin M A. Piecewise quadratic approximation on triangles [J]. ACM Trans Math Software, 1977(3): 316-325.
- [4] Chui C K, He T X. Bivariate C^1 quadratic finite elements and vertex splines [J]. Mathematics of Computation, 1990, 54: 169-187.
- [5] Lai M J. Approximation order from bivariate C^1 -cubics on a four-directional mesh is full [J]. Comput Aided Geom Des, 1994, 11: 215-223.
- [6] Lai M J. Scattered data interpolation and approximations using bivariate C^1 piecewise cubic polynomials [J]. Comput Aided Geom Des, 1996, 13: 81-88.
- [7] Wang T J. A C^2 -quintic spline interpolation scheme on triangulation [J]. Comput Aided Geom Des, 1992, 9: 379-386.
- [8] Farin G. Triangular bernstein-bezier patches [J]. Comput Aided Geom Des, 1986, 3: 83-128.
- [9] Liu H W, Hong D. An explicit local basis for C^1 cubic spline spaces over a triangulated quadrangulation [J]. J Comp Appl Math, 2003, 155: 187-200.
- [10] Chui C K, Wang R H. Multivariate spline spaces [J]. J Math Anal Appl, 1983, 47: 131-142.
- [11] Liu H W, Lu W P. A bivariate C^1 cubic spline space on Wang's refinement [J]. J Comp Appl Math, submitted, 2007.

(责任编辑: 尹 闯)