DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 344- 347

小 Sidon数上界初探*

Initially Probing into Upper Bounds for Small Sidon Numbers

许成章[1],陈 红[1],黎贞崇[2],何建东[2]
XU Cheng-zhang[1], CHEN Hong[1], LI Zhen-chong[2], HE Jian-dong[2]

(1.梧州学院,广西梧州 543002; 2.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 给出一种新的计算小 Sidon数 $F(k)$ 的准确值或上界的算法,并获得 6个 Sidon数的新上界: $F(15)\leqslant 159, F(16)\leqslant 191, F(17)\leqslant 221, F(18)\leqslant 252, F(19)\leqslant 298, F(20)\leqslant 341$.

关键词: Sidon序列 Sidon数 上界
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)04-0344-04

Abstract A new algorithm of computing precise values or upper bounds for small Sidon numbers is given and six new uppers $F(15)\leqslant 159, F(16)\leqslant 191, F(17)\leqslant 221, F(18)\leqslant 252, F(19)\leqslant 298, F(20)\leqslant 341$ are obtained.

Key words Sidon sequence, Sidon number, upper bound

1932年, Sidon[1]在研究 Fourier级数时,提出问题: 方程 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4, a_i \in A$,除平凡解 $\{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$之外,不包含其他任何解,这样的整数集 A是多稠密的.这个问题引起了 Erdös的关注,从此,数论和组合数学中都出现了一些关于 Sidon序列的难题.

近年来,很多学者对 Sidon序列进行过研究[2-8],小 Sidon数 $F(k)$ 的计算问题逐渐引起人们的关注.由于计算于 $F(k)$时运算量随着 k的增大而呈指数型的增长,因此,即使在计算机飞跃发展的今天,人们对小 Sidon数 $F(k)$ 仍然知之甚少.直到 2006年,文献 [8]才计算得到 $3\leqslant k\leqslant 11$时 $F(k)$ 的准确值和一个上界 $F(12)\leqslant 92$.

动态综述文献 [9]收录了目前学术界得到的小 Sidon数 $F(k)$ 的全部结果.文献 [9]认为当 $k\leqslant 10$时已经列出了所有最短的 Sidon序列;当 $k = 11$时列出了最短的 Sidon序列中的2个.如今不知道是否还存在最短的 Sidon序列.本文在文献 [9]的基础上从 $k = 15$开始探索 $F(k)$, 给出一种新的计算小 Sidon数 $F(k)$ 的准确值或上界的算法,并得到6个 Sidon数新下界.

1 预备知识

定义 1 序列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k (k\geqslant 2)$ 称为 Sidon序列,如果其中任意相异两项的差都不相同; 称使得 $a_k - a_1$达到最小值的那些 Sidon序列为最短的 Sidon序列.

容易看出,对最短的 Sidon序列作平移或对称变换,仍然得到最短的 Sidon序列.因此,为了寻找最短的 Sidon序列,只须考察形如 $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k$的 Sidon序列.在此,引进一个前人已经论及却从未正式命名过的函数 $F(k) = 1 + \min\{a_k \mid 0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k$是 Sidon序列,其中 $k\geqslant 2$,我们把它称为 Sidon函数,简称 Sidon数$\}$.

表 1是文献 [9]中记录的一些关于 $F(k)$的结果,其中关于 $k = 12$, 13的结果尚未公开发表.

收稿日期: 2008-07-20
作者简介: 许成章 (1976-),男,硕士研究生,讲师,主要从事组合数学和图论的研究工作。
* 国家自然科学基金资助项目 (60563008),广西自然科学基金资助项目 (0728051),梧州学院科研项目资助项目 (2007B007)资助。

表 1 迄今已知的小 Sidon数的准确值与上界

Table 1 The known numerical value and upper bounds of small Sidion number

k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$	k	$F(k)$
2	2	6	18	10	56	14	$\leqslant 140$
3	4	7	26	11	73	15	$\leqslant 163$
4	7	8	35	12	86	16	$\leqslant 195$
5	12	9	45	13	107		

2 主要结果

约定一元的整数集也视为 Sidon集并且令 $F(1)=1$.容易看出,$F(k)\geqslant k$是一个平凡的下界,并且 $\{a_j \mid a_j=2^{j-1}-1, 1\leqslant j\leqslant k\}$是一个 Sidon集,故有

定理 1 $k\leqslant F(k)\leqslant 2^{k-1}, k\geqslant 1$.

容易知道,$\{0\}$,$\{0,1\}$,$\{0,1,3\}$都是最短的 Sidon集,因此在定理 1中,当 $1\leqslant k\leqslant 2$时已经给出了 $F(k)$的下确界.当 $1\leqslant k\leqslant 3$已经给出了 $F(k)$的上确界.当 $k\geqslant 4$时,令

$D=\{0=a_1<a_2<\cdots<a_k \mid a_j\leqslant 2^{k-1}-k+j-1\}$,

$S=\{0=a_1<a_2<\cdots<a_k \mid a_1<a_2<\cdots<a_k$ 是 Sidon序列$\}$.

即可以得出结论.

定理 2 $F(k)=1+\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in D\cap S\}$.

由定理 2可以看出,为了计算函数 $F(k)$的准确值,必须考察集合 D中的所有 k阶序列 $0=a_1<a_2<\cdots<a_k$,再验证在这些序列中是否有 Sidon序列,然后从这些 Sidon序列中筛选出末项最小者.由于要考察的集合 D的范围太大,因而确定函数 $F(k)$的准确值就非常困难.

定理 3 给定整数 $k\geqslant 4, n\leqslant 2^{k-1}$,令

$B=\{0=a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant n-1 \mid a_j\leqslant n-k+j-1\}$.

如果 $B\cap S\neq\varnothing$,那么

$F(k)=1+\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in B\cap S\}$.

证明 根据定义 1,容易知道不可能有

$$F(k)>1+\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in B\cap S\}. \quad (1)$$

所以,只需要证明下式不成立即可.

$$F(k)<1+\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in B\cap S\}. \quad (2)$$

假设 $B\cap S\neq\varnothing$时,(2)式成立,则根据定义 1及(2)式可以知道

$\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in D\cap S\}<\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in B\cap S\}$.

令 $s=F(k)-1=\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in D\cap S\}$,这表明存在 Sidon序列

$$0=a_1<a_2<\cdots<a_k=s\notin B. \quad (3)$$

再根据 B的定义,可以知道在(3)式中存在某个 $j\in[2,k]$使得 $a_j>n-k+j-1$,即 $n-a_j<k-j+1$.对(3)式作对称变换,得到的序列 $n-a_k<n-a_{k-1}<\cdots<n-a_{j-1}<\cdots n-a_2<n-a_1=n$仍然是一个 Sidon序列.由集合 B的定义有 $a_k\leqslant n-1$,即 $n-a_k\geqslant 1$.注意,Sidon序列的子序列也是 Sidon序列,则上述 Sidon序列的子序列为 $n-a_k<n-a_{k-1}<\cdots<n-a_j$.给出上界

$F(k-j+1)\leqslant n-a_j-(n-a_k)+1\leqslant n-a_j<k-j+1$.

再由定理 2有 $k-j+1\leqslant F(k-j+1)$,这就导致 $F(k-j+1)<k-j+1\leqslant F(k-j+1)$,矛盾,所以(3)式不成立.由(3)式不成立可以知道(2)式也不成立.综上所述,定理 4的结论成立.

显然,如果把考察范围缩小为 B的一个真子集,那么就有可能遗漏更短的 Sidon序列,此时只能得到 $F(k)$的上界而非准确值.故有

定理 4 如果 $B_1\subset B$并且 $B_1\cap S\neq\varnothing$,那么

$F(k)\leqslant 1+\min\{a_k \mid 0=a_1<a_2<\cdots<a_k\in B_1\cap S\}$.

定理 5 如果 $B\cap S=\varnothing$,那么 $F(k)\geqslant n$.

证明 假设当 $B\cap S=\varnothing$时 $F(k)<n$成立,则由 $B\cap S=\varnothing$可以知道所有 Sidon序列都不满足 B的条件.不妨设在某个 $0=a_1<a_2<\cdots<a_k=n\in S$中,存在 $j\in[2,k]$使得 $a_j>n-k+j-1$,同理定理 4的证明也会导致矛盾.这就证明了定理 5的结论.

根据上述几个定理,我们设计一个计算小 Sidon数的准确值或上界的算法,可以借助于计算机辅助运算探索小 Sidon数 $F(k)$的准确值或上界.

算法 1

步骤 1 给定整数 $k\geqslant 4$与 $n\leqslant 2^{k-1}$,在 $1\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant n-k+1$的范围内选取适当的 b_1与 b_2.

步骤 2 令 $B_1=\{0=a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant n-1 \mid b_1\leqslant a_2\leqslant b_2$,当 $2\leqslant j\leqslant k$时 $a_j\leqslant n-k+j-1\}$中的各序列按字典排列法排序,第 i个序列 A_i是 a_1

$< a_2 < \cdots < a_k$.令 $i = 1, c = 0$.

步骤 3 考察 B_1 中第 i 个序列 A_i: $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$,如果它不是 Sidon 序列,转到步骤 5.

步骤 4 如果 $a_k \leqslant n - 1$,令 $n = a_k + 1, c = 1$,打印 Sidon 序列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$.

步骤 5 如果 $a_2 \leqslant b_2$,令 $i = i + 1$,重复步骤 3.

步骤 6 如果 $c = 1$,那么就得到 $F(k)$ 的准确值或新的上界;如果 $b = 1$ 并且 $b_2 = n - k + 1$,令 $F(k) = n$;否则令 $F(k) \leqslant n$.

步骤 7 若 $c = 0$,那么如果 $b = 1$ 并且 $b_2 = n - k + 1$,令 $F(k) \geqslant n$;否则不能获得新的结论.

步骤 8 运算结束.

在算法 1 中,由步骤 1 赋予初始数值.注意到,A_i 跑遍 B_1 的各个序列,即在 B 中相应于 $b \leqslant a_2 \leqslant b_2$ 的那些序列.这里有 $B_1 = B \Leftrightarrow b = 1$ 并且 $b_2 = n - k + 1$.算法 1 的步骤 4~步骤 6 的作用是根据字典排列法依次生成 $A_i \in B$,同时验算它是否属于 Sidon 序列,是否有 $a_k \leqslant n - 1$.如果 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ 是 Sidon 序列,则赋值 $n = a_k + 1$ 与 $c = 1$.

当 $A_i \in B_1$ 跑遍 $B_1 \subseteq B$ 时进入步骤 6 或步骤 7,有两种情形:

如果 $c = 1$,则在步骤 4 中打印较短的 Sidon 序列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$,这表明 $B_1 \cap S \neq \varnothing$.此时如果 $B_1 = B$,则根据定理 3 得到准确值 $F(k) = n$;或者当 $B_1 \subset B$ 时,根据定理 4 得到上界 $F(k) \leqslant n$.

如果 $c = 0$,则在步骤 4 中不作为,这表明 $B_1 \cap S = \varnothing$.此时,如果 $B_1 = B$ 则根据定理 5 就得到下界 $F(k) \geqslant n$;或者当 $B_1 \subset B$ 时不能获得新的结论.

算法 1 把待考察的范围由集合 D 缩小为 B,因而具有较高的运算效率.

例 1 令 $k = 4, n = 8, b = 1, b_2 = 5$,此时 $1 \leqslant a_2 \leqslant 5$,有 $B_1 = B$,并且由集合 B 的定义有

$B = B_1 = \{0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant 7 | 1 \leqslant a_2 \leqslant 5$,当 $2 \leqslant j \leqslant k$ 时 $a_j \leqslant 3 + j\} = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 2, 5\} \cdots \{0, 4, 6, 7\}, \{0, 5, 6, 7\}\}$.

按照算法 1,在步骤 4~步骤 6 中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 中依次跑过 B 中各序列时,得到 Sidon 序列 $\{0, 1, 3, 7\}, \{0, 1, 4, 6\}, \{0, 2, 5, 6\}$.根据定理 3 得到准确值 $F(4) = 7$.

注意到,上述 Sidon 序列 $\{0, 1, 4, 6\}$ 与 $\{0, 2, 5, 6\}$ 是对称的.以下约定,对称的两个最短的 Sidon 序列只写出一个.

例 2 令 $k = 5, n = 14, b = 1, b_2 = 12$.此时 $1 \leqslant a_2 \leqslant 12$,有 $B_1 = B$,并且由集合 B 的定义有

$B = B_1 = \{0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant 13 | 1 \leqslant a_2 \leqslant 10$,当 $2 \leqslant j \leqslant k$ 时 $a_j \leqslant 8 + j\} = \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 5\}, \{0, 1, 2, 3, 6\}, \cdots, \{0, 9, 11, 12, 13\}, \{0, 10, 11, 12, 13\}\}$.

按照算法 1,在步骤 4~步骤 6 中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 依次跑过 B 中各序列时,得到两个最短的 Sidon 序列 $\{0, 1, 4, 9, 11\}$ 与 $\{0, 2, 7, 8, 11\}$,根据定理 3 得到准确值 $F(5) = 12$.

例 3 令 $k = 6, n = 21, b = 1, b_2 = 15$.此时 $1 \leqslant a_2 \leqslant 16$,有 $B_1 = B$,并且由集合 B 的定义有

$B = B_1 = \{0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant 20 | 1 \leqslant a_2 \leqslant 16$,当 $2 \leqslant j \leqslant k$ 时 $a_j \leqslant 14 + j\} = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}, \cdots, \{0, 15, 17, 18, 19, 20\}, \{0, 16, 17, 18, 19, 20\}\}$.

按照算法 1,在步骤 4~步骤 6 中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ 依次跑过 B 中各序列时,得到两个最短的 Sidon 序列 $\{0, 1, 4, 10, 12, 17\}, \{0, 1, 4, 10, 15, 17\}, \{0, 1, 8, 11, 13, 17\}$ 与 $\{0, 1, 8, 12, 14, 17\}$,根据定理 3 得到准确值 $F(6) = 18$.

在上述各例中,集合 D 与 B_1 似乎相差不大,但是当 k 增大时,两者的差别非常大.例如当 $k \geqslant 13$ 时,B_1 的范围缩小为 D 的几十分之一,甚至几百分之一.

模仿上述各例,用算法 1 计算出文献 [9] 记录的 $3 \leqslant k \leqslant 13$ 的 Sidon 数的准确值 $F(k)$,以及相应的 Sidon 序列,在 CPU 为 AMD3600+ 的电脑上,所用的计算时间如表 2.

表 2 用算法 1 计算 Sidon 数的准确值 $F(k)$ 所用的运算时间

Table 2 The runtime of $F(k)$ by algorithm 1

k	$F(k)$ 的运算时间 (s) Runtime of $F(k)$	k	$F(k)$ 的运算时间 (s) Runtime of $F(k)$	k	$F(k)$ 的运算时间 (s) Runtime of $F(k)$	k	$F(k)$ 的运算时间 (s) Runtime of $F(k)$
2	0	5	0	8	1	11	580
3	0	6	0	9	3	12	3980
4	0	7	0	10	22	13	86520

定理 6 $F(15) \leqslant 159, F(16) \leqslant 191, F(17) \leqslant 221, F(18) \leqslant 252, F(19) \leqslant 298, F(20) \leqslant 341$.

证明 在算法 1 中缩小 $a_2 \in [b, b_2]$ 跑过的范围,即在步骤 2~步骤 5 中仅跑过 B 的子集,获得较短的 Sidon 序列,根据定理 4 得到一些小 Sidon 数 $F(k)$ 的上界,结果见表 3.

表 3 用算法 1计算得到的 Sidon序列

Table 3 Sidon sequence under algorithm 1

k	n	Sidon序列 Sidon sequence
15	158	0, 1, 3, 25, 37, 43, 48, 58, 75, 89, 119, 138, 145, 154, 158
16	190	0, 1, 4, 11, 39, 44, 57, 59, 71, 93, 122, 143, 159, 167, 184, 190
17	220	0, 1, 3, 7, 15, 34, 43, 56, 73, 93, 117, 140, 169, 194, 204, 215, 220
18	251	0, 1, 3, 8, 14, 26, 45, 67, 84, 94, 124, 145, 179, 195, 199, 227, 242, 251
19	297	0, 1, 3, 8, 19, 34, 47, 61, 70, 82, 111, 148, 170, 202, 242, 267, 287, 291, 297
20	340	0, 1, 3, 7, 12, 22, 42, 56, 79, 92, 119, 137, 180, 188, 212, 240, 278, 294, 311, 340

由表 3可以得出定理 1的结论.

实际上,验证表 3中序列都是 Sidon序列所用的运算时间不到 1s,但是找到这些 Sidon序列所用的计算机时间却要耗费 200多小时.

参考文献:

[1] Sidon S. Ein satz über trigonomietrische polynome und seine anwendungen in der theorie der fourier-Reihen [J]. Math Annalen, 1932, 106: 536-539.

[2] Singer J. A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory [J]. Trans Amer math soc, 1938, 43: 377-385.

[3] Erods P, Turán P. On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems [J]. J London Math Soc, 1941, 16: 212-215.

[4] Ruzsa I Z. Solving a linear equation in a set of integers [J]. I Acta Arith, 1993, 65: 259-282.

[5] Green B. The number of squares and B_h [g] sets[J]. Acta Arith, 2001, 100: 365-390.

[6] Habsieger L, Plagne A. Ensembles B_2 [2]: L'Étau se Resserre [J/OL]. Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2002, 2 (A2, 20). http://www.integers-ejcnt.org/vo12.html.

[7] Cilleruelo J, Ruzsa I Z, Trujollo C. Upper and lower bounds for finite B_h [g] sequences [J]. J Number Theory, 2002, 97: 26-34.

[8] Martin G, O'Bryant K. Constructions of generalized Sidon sets [J]. Journal of Combinatorial Theory Series A, 2006, 113: 591-607.

[9] O'Bryant K. A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences [J/OL]. Electronic Journal of Combinatorics Dynamic Survey, 2004, 11 (39). http://www.combinatorics.org/surveys/ds11.pdf.

(责任编辑: 尹 闯)