DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 341~343

两个数论函数的混合均值*

Hybrid Mean Value about Two New Arithmetical Functions

冯　强，王荣波
FENG Qiang　WANG Rong-bo

(延安大学数学与计算机科学学院，陕西延安　716000)
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an, Shaanxi, 716000, China)

摘要：利用解析方法研究 $U(1)=1, U(n)=\prod_{p|n} p$ 和 $V(1)=1, V(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1, V(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s})=V(p_1^{\alpha_1})V(p_2^{\alpha_2})\cdots V(p_s^{\alpha_s})$ 两个数论函数与除数函数 $\sigma_{\alpha}(n)$ 的混合均值分布性质，得出3个较为精确的渐近公式.

关键词：数论函数　混合均值　渐近公式
中图法分类号：O156.4　　文献标识码：A　　文章编号：1005-9164(2008)04-0341-03

Abstract Two new arithmetical functions are introduced, and three sharped asymptotic formular about this two new arithmetical functions and divisor function are given by using the analytic methods.

Key words arithmetical function, hybrid mean value, asymptotic formula

数论中算术函数的均值估计问题在解析数论研究中占有十分重要的位置，许多著名的数论难题都与之密切相关.在这一领域取得任何实质性研究进展都必将对解析数论的发展起到重要的推动作用.

对于给定的自然数 n，

$$U(1)=1, U(n)=\prod_{p|n} p, \tag{1}$$

其中 $\prod_{p|n}$ 表示对 n 的所有素数求积；

$$V(1)=1, V(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1, V(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s})=V(p_1^{\alpha_1})V(p_2^{\alpha_2})\cdots V(p_s^{\alpha_s}), \tag{2}$$

其中 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式，易知，$U(n)$ 与 $V(n)$ 是可积的，但是却不是完全可积的.关于(1)式与(2)式两个数论函数，文献[1]研究了 $U(n)$ 与 $V(n)$ 的均值分布性质；文献[2]研究 Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 的均值分布性质，指出当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时，$SP(n)=U(n)$，并给出关于 $SP(n)$ 的几个渐近公式.

关于(1)式和(2)式两个数论函数与其它数论函数的混合均值的研究，目前还没有相关报道.本文利用解析的方法，研究除数函数 $\sigma_{\alpha}(n)$ 与 $U(n)$，$V(n)$ 的混合均值及其相关的渐近公式.

1 相关定义及引理

定义 1[3]　对于实数或复数 α 以及任意自然数 $n\geqslant 1$，规定 $\sigma_{\alpha}(n)=\sum_{d|n} d^{\alpha}$ 为 n 的约数的 α 次方幂的和.这样定义的 $\sigma_{\alpha}(n)$ 称为除数函数，而且是积性的.

定义 2[3]　定义 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 和 $\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ 两个恒等式，其中 $n\geqslant 1$ 为任意自然数，$\sum_{n=1}^{\infty}$ 表示对所有的自然数 n 求和；p 为任意素数，$\prod_{p|n}$ 表示对 n 的所有素数求积.这样定义的 $\zeta(s)$ 称为 Riemann-zeta 函数.

引理 1[4]　设 $A(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$，$\sigma_a<+\infty$；再设存在递增函数 $H(u)$ 及函数 $B(u)$ 使得 $|a(n)|\leqslant H(n)$，$n=1,2,3,\cdots$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-\sigma}\leqslant B(\sigma)$，$\sigma>\sigma_a$.则

收稿日期：2007-12-10
作者简介：冯　强(1975-)，男，讲师，硕士，主要从事解析数论研究工作。
* 国家自然科学基金项目(10271093)，陕西省自然科学基金项目(2004A09)资助。

对任意的 $s_0=\sigma_0+it_0$ 及 $b_0>\sigma_a$, 当 $b_0\geqslant b>0$, $b_0\geqslant\sigma_0+b>\sigma_a$, $T\geqslant$ 及 $x\geqslant 1$ 时, 有

(i) $x\neq$ 正整数时,

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right),$$

其中 N 是离 x 最近的整数 (x 为半奇数时, 取 $N=x-\frac{1}{2}$), $\|x\|=|N-x|$;

(ii) $x=$ 正整数 N 时,

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{s_0}+\frac{1}{2}a(N)N^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{N^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{N^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(N^{1-\sigma_0}H(2N)\min\left(1,\frac{\log N}{T}\right)\right),$$

其中 O 常数仅和 σ_a, b_0 有关.

2 主要结论

定理 1 对任意实数 $\alpha\geqslant 1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(\gamma(n))=\frac{6\zeta(\alpha+1)}{\pi^2(\alpha+1)}x^{\alpha+1}+O(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

证明 对任意复数 s ($\mathrm{Re}\,s>2$), 设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(\gamma(n))}{n^s}$, 由 Euler公式[3]可得

$$f(s)=\prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(\gamma(p))}{p^s}+\frac{\sigma_\alpha(\gamma(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(\gamma(p^n))}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^s}+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(p)}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{1+p^\alpha}{p^s}+\frac{1+p^\alpha}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1+p^\alpha}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+(1+p^\alpha)\frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)=\zeta(s)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-\alpha}}\right)=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))},$$

其中 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有一阶极点, 留数为 1. 由于 $|\sigma_\alpha(n)|\leqslant n^\alpha$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(\gamma(n))}{n^\sigma}\right|\leqslant\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}$, $\sigma>1$, $\alpha>0$, 由 Perron公式[4], 有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\sigma_\alpha(\gamma(n))}{n^{s_0}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{\|x\|}\right)\right),$$

其中 N 是离 x 最近的整数, 且 $\|x\|=|x-N|$, 令 $s_0=0$, $b=\alpha+2$, $T=x^{\alpha+\frac{3}{2}}$, $H(x)=x^\alpha$, $B(\sigma)=\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}$, 这时有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(\gamma(n))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+2-iT}^{\alpha+2+iT}\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}),\qquad(3)$$

平移(3)式中的积分限至 $\mathrm{Re}(s)=\alpha+\frac{1}{2}$, 这时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}\frac{x^s}{s}$ 在 $s=\alpha+1$ 处有一阶极点, 且 $\mathrm{Res}_{s=\alpha+1}\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2(s-\alpha))}\frac{x^s}{s}=\frac{6\zeta(\alpha+1)}{\pi^2(\alpha+1)}x^{\alpha+1}$, 于是可得

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(\gamma(n))=\frac{6\zeta(\alpha+1)}{\pi^2(\alpha+1)}x^{\alpha+1}+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{\alpha+\frac{1}{2}-iT}+\int_{\alpha+\frac{1}{2}-iT}^{\alpha+\frac{1}{2}+iT}+\int_{\alpha+\frac{1}{2}+iT}^{b+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma<1$ 时, $|\zeta(s)|\ll|t|^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}$, 容易估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+\frac{1}{2}-iT}^{\alpha+\frac{1}{2}+iT}f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

与

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\alpha+2-iT}^{\alpha+\frac{1}{2}-iT}+\int_{\alpha+\frac{1}{2}+iT}^{\alpha+2+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right|\ll x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

从而可得

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(\gamma(n))=\frac{6\zeta(\alpha+1)}{\pi^2(\alpha+1)}x^{\alpha+1}+O(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

定理 1 证明完毕.

定理 2 对任意实数 $\alpha\leqslant 1$, 有

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_\alpha(n)\gamma(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)}{(\alpha+2)}x^{\alpha+2}\prod_p\left(1-\frac{p^\alpha+p+1}{p^{\alpha+1}(p+1)}\right)+O(x^{\alpha+\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

证明 对任意复数 s ($\mathrm{Re}\,s>3$), 设

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)\gamma(n)}{n^s}.$$

由 Euler公式[3]可得

$$f_1(s)=\prod_p\left(1+\frac{\sigma_\alpha(p)\gamma(p)}{p^s}+\frac{\sigma_\alpha(p^2)\gamma(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\sigma_\alpha(p^n)\gamma(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{p(1+p^\alpha)}{p^s}+\frac{p(1+p^\alpha+p^{2\alpha})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p(1+p^\alpha+\cdots+p^{n\alpha})}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$

$$\zeta(s)\prod_p\left(1-\frac{1-p}{p^s}+p\frac{\frac{p^\alpha}{p^s}}{1-\frac{p^\alpha}{p^s}}\right)=\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\cdot\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s-\alpha}}-\frac{1-p}{p^s}+\frac{1}{p^{s-\alpha-1}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(s-\alpha-1)}{\zeta(2(s-\alpha-1))}\prod_p\left(1-\frac{p^\alpha+p+1}{p^{\alpha+1}(p^{s-\alpha-1}+1)}\right),$$

而 $f_1(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=\alpha+2$ 处有一阶极点, 留数为

$$\mathrm{Res}_{s=\alpha+2}\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(s-\alpha-1)}{\zeta(2(s-\alpha-1))}\cdot\prod_p\left(1-\frac{p^\alpha+p+1}{p^{\alpha+1}(p^{s-\alpha-1}+1)}\right)\frac{x^s}{s}=\frac{\zeta(\alpha+2)}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\prod_p\left(1-\frac{p^\alpha+p+1}{p^{\alpha+1}(p+1)}\right).$$

由定理1的方法可得

$$\sum_{n\le x}e_\alpha(n)U(n)=\frac{\zeta(\alpha+2)}{(\alpha+2)}x^{\alpha+2}\cdot\prod_p\left(1-\frac{p^\alpha+p+1}{p^{\alpha+1}(p+1)}\right)+O(x^{\alpha+\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

定理2得以证明.

定理3 对任意实数 $x\geqslant 1$,有

$$\sum_{n\le x}e_\alpha(n)V(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\cdot\prod_p\left(1+\frac{(p^{\alpha+1}-1)(p-1)}{p^{\alpha+2}(p^{\alpha+2}-1)(p^\alpha-1)}\right)+O(x^{\alpha+\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

证明 对任意复数 s ($\mathrm{Re}\,s>3$),设 $f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_\alpha(n)V(n)}{n^s}$,由 Euler公式[3]可得

$$f_2(s)=\prod_p\left(1+\frac{e_\alpha(p)V(p)}{p^s}+\frac{e_\alpha(p^2)V(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{e_\alpha(p^n)V(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{(p-1)(1+p^\alpha)}{p^s}+\cdots+\frac{(p^2-1)(1-p^\alpha+p^{2\alpha})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{(p^n-1)(1+p^\alpha+\cdots+p^{n\alpha})}{p^{ns}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left\{1+\frac{p(1+p^\alpha)}{p^s}+\frac{p^2(1+p^\alpha+p^{2\alpha})}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^n(1+p^\alpha+\cdots+p^{n\alpha})}{p^{ns}}+\cdots-\left(\frac{1+p^\alpha}{p^s}+\frac{1+p^\alpha+p^{2\alpha}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1+p^\alpha+\cdots+p^{n\alpha}}{p^{ns}}+\cdots\right)\right\}=\zeta(s-1)\prod_p\left\{1+\frac{\frac{1}{p^{s-\alpha-1}}}{1-\frac{1}{p^{s-\alpha-1}}}-\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\left(\frac{1}{p^s}+\frac{\frac{1}{p^{s-\alpha}}}{1-\frac{1}{p^{s-\alpha}}}\right)\right\}=$$

$$\zeta(s-1)\zeta(s-\alpha-1)\prod_p\left(1+\frac{(p^{s-1}-1)(p^{s-\alpha-1}-1)}{(p^\alpha-1)(p^s-1)p^{2s-\alpha-2}}\right),$$

而 $f_2(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=\alpha+2$ 处有一阶极点,留数为

$$\mathrm{Res}_{s=\alpha+2}\zeta(s-1)\zeta(s-\alpha-1)\cdot\prod_p\left(1+\frac{(p^{s-1}-1)(p^{s-\alpha-1}-1)}{(p^{\alpha-1})(p^s-1)p^{2s-\alpha-2}}\right)\frac{x^s}{S}=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\cdot\prod_p\left(1+\frac{(p^{\alpha+1}-1)(p-1)}{p^{\alpha+2}(p^{\alpha+2}-1)(p^\alpha-1)}\right).$$

由此可得

$$\sum_{n\le x}e_\alpha(n)V(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\cdot\prod_p\left(1+\frac{(p^{\alpha+1}-1)(p-1)}{p^{\alpha+2}(p^{\alpha+2}-1)(p^\alpha-1)}\right)+O(x^{\alpha+\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

定理3得以证明.

参考文献:

[1] 刘华宁. 两个均值公式[J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2006, 27(1): 15-17.

[2] 徐哲峰. Smarandache幂函数的均值[J]. 数学学报: 中文版, 2006, 49(1): 77-80.

[3] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[4] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

(责任编辑: 韦廷宗)

银河系发现最暗恒星

美国科学家最近在银河系中发现了两颗迄今亮度最暗的恒星,这两颗恒星的亮度仅相当于太阳亮度的百万分之一。

科学家们曾经认为,这对昏暗的"灯泡"仅仅是一颗单一的褐矮星。现在利用美国宇航局的"斯皮策"红外线太空望远镜观测到这种褐矮星后,发现该物体表面大气层的温度介于华氏560~680度,比木星高出好几百度,却又比恒星冷得多。为了计算出该恒星的亮度,科学家首先确定其与地球的距离,经过3年的精确测量,测出它的位置为"2M 0939",距离"唧筒座"大约17光年,是距离地球最近的五颗褐矮星之一。这一测量数据也可以作为其低温和光线极其暗淡的解释。但令人费解的是,根据其温度推测,"2M 0939"的亮度却又比一般褐矮星预想的亮度高出一倍。科学家们认为,该恒星肯定比其他褐矮星表面积也大一倍。换句话说,它是"双子星",每个星体负责一半的亮度,每个星体质量都是木星质量的30~40倍,所以它们的亮度仅是太阳亮度的百万分之一。

(据科学网)