DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.002
广西科学 Guangxi Sciences 2008,15(4):330~333,337

有限可解群的新刻画

New Characterizations of Finite Solvable Groups

李世荣,周龙桥,农国平,何 俊
LI Shi-rong, ZHOU Long-qiao, NONG Guo-ping, HE Jun

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:在文献[3]的基础上,给出有限群极大子群的 CI-截的3个性质,并得到有限群可解的3种新刻画:设 G 是有限群,如果 G 在 $F^s(G)$ 中的极大子群的 CI-截同构,则 G 可解;若 p 是 $|G|$ 的一个素因子,对于群 G 的极大子群 $M\in F^{ps}(G)$,M 的 CI-截的阶都是 $q^a r^b$,则 G 可解,其中 q, r 是两个不同于 p 的固定素数;设 H 是群 G 的 S-拟正规子群,如果对于 G 的每个极大子群 M,满足 $H\not\subseteq M$ 时,M 的 CI-截幂零,则 H 可解.

关键词:可解群 极大子群 CI-截
中图法分类号:O152.1 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)04-0330-04

Abstract Three pieces of properties of CI-section on maximal subgrop of finite group are given under reference [3], and some new characterizations of solvable finite groups are obtained using the concept of CI-section: let G be a finite group, if CI-sections of all maximal subgroups of $\{F^s(G)$ are isomorphic, then G is solvable; let p be a prime divisor of $|G|$ and M be a maximal subgroup of G, if $M\in F^{ps}(G)$ such that $|\mathrm{Sec}(M)| = q^a r^b$, where q and r are two distinct primes and different from p, then G is solvable; let H be an S-quasinormal subgroup of G. If for each maximal subgroup M of G with $H\not\subseteq M$ the CI-section of M is nilpotent, then H is solvable.

Key words solvable group, maximal subgroup, CI-section

利用极大子群研究有限群的结构和性质一直是人们感兴趣的课题.1959年,Deskins[1]引入群 G 的极大子群 M 的正规指数概念,给出群 G 及其极大子群 M,得到 G 可解的充分必要条件是对于 G 的每个极大子群 M 有 $Z(G:M)=|G:M|$.其中,令 N/K 是 G 的一个主因子,满足 $G=MN$ 并且 N 有尽可能小的阶;N/K 的阶叫做 M 在 G 中的正规指数,记作 $Z(G:M)$.王燕鸣[2]定义了群的 C-正规子群,得出群 G 可解的充分必要条件是对于群 G 的所有极大子群都是 C-正规的.其中,有限群 G 的子群 H 称为 G 的 C-正规子群,如果存在 G 的一个正规子群 K,使得 $G=HK$ 并且 $H\cap K\leq H_G$(H_G 表示 H 在 G 中的核).李世荣[3]定义与正规指数和 C-正规子群都密切相关的 CI-截的概念,给出一些极大子群 CI-截基本性质.这是继 Deskins 定义极大子群的极大完备之后又一个分类有限群的重要工具.本文在此基础上又给出关于有限群极大子群 CI-截的一些性质,并推广文献[3]中的两个结果,得出有限群可解的3种新刻画:(1)设 G 是有限群,如果 G 在 $F^s(G)$ 中的极大子群的 CI-截同构,则 G 可解;(2)若 p 是 $|G|$ 的一个素因子,对于群 G 的极大子群 $M\in F^{ps}(G)$,M 的 CI-截的阶都具有 $q^a r^b$ 的形式,则 G 可解.其中 q,r 是两个不同于 p 的固定素数;(3)设 H 是群 G 的 S-拟正规子群,如果对于 G 的每个极大子群 M,满足 $H\subseteq M$ 时,M 的 CI-截幂零,则 H 可解.

文中 G 表示一个有限群,未加说明的符号均是标准的,$\overline{G}$ 表示商群 G/N,$M<\cdot G$ 表示 M 是 G 的极大子群,M_G 表示 $\bigcap_{g\in G} M^g$,即 M 在 G 中的核,p 表示一个素数.

收稿日期:2008-05-23
作者简介:李世荣(1940-),男,教授,主要从事有限群的研究工作.

1 预备知识

令 P 是一个素数幂阶群，$A(P)$ 为 P 的具有极大阶的交换群之集合，定义 $J(P)=\langle A \mid A\in A(P)\rangle$，并称之为群 P 的 Thompson 子群.

定义 1.1[3] 给定群 G 及 G 的极大子群 M，令 N/K 是 G 的一个主因子，$K\leq M$ 且 $N\not\leq M$，则称 $(M\cap N)/K$ 为 M 的一个 CI-截，记作 $\mathrm{Sec}(M)$.

定义 1.2 $F_s(G)=\{M<\cdot\, G \mid \mathrm{Sec}(M)\neq 1\}$.

定义 1.3 $F^s(G)=\{M<\cdot\, G \mid N_G(P)\leq M$，其中 P 是 G 的某个西洛子群$\}$.

定义 1.4 $F^{ps}(G)=\{M<\cdot\, G \mid M\in F^s(G)$ 且 $|G:M|\neq p^{\alpha}, \alpha\geq 1\}$.

定义 1.5 $\mathrm{Sol}(G)=\cap\{M<\cdot\, G \mid M\in F_s(G)\}$，若 $F_s(G)\neq\varnothing$；否则，$\mathrm{Sol}(G)=G$.

定义 1.6 $H^s(G)=\cap\{M<\cdot\, G \mid M\in F^s(G)\}$，若 $F^s(G)\neq\varnothing$；否则，$H^s(G)=G$.

引理 1.1[3] 对于群 G 的任意极大子群 M，在同构意义下 M 在 G 中有唯一的 CI-截.

引理 1.2[3] 令 $N\leq M<\cdot\, G$, $N\trianglelefteq G$, 那么 M/N 与 M 的 CI-截同构.

引理 1.3[3] 设 M 是 G 的一个极大子群，那么 $Z(G:M)=|\mathrm{Sec}(M)|\,|G:M|$.

引理 1.4[4] 设 $N\trianglelefteq G$, p 是 $|G|$ 的一个素因子，P 是一个 p-子群，那么 $N_G(P)N/N\leq N_{G/N}(PN/N)$ 当且仅当 $(|N|,p)=1$ 时等号成立.

引理 1.5[5] (Petter) 群 G 是 2-闭的当且仅当对于 G 的每个奇数阶的西洛子群 P，$N_G(Z(J(P)))$ 是 2-闭的.

引理 1.6[6] 设 $N\trianglelefteq G$, $P\in \mathrm{Syl}_p(N)$，则存在 $G_p\in \mathrm{Syl}_p(G)$，使得 $N_G(G_p)\leq N_G(P)$.

引理 1.7[7] 设群 G 有一个核为 1 的极大子群，则下列结论等价.

(1) G 中存在非平凡的可解正规子群；

(2) G 中存在唯一的极小正规子群，并且每个包含在 $F^s(G)$ 中且在 G 中的核为 1 的极大子群，在 G 中的指数有一个共同的素因子；

(3) G 中所有核为 1 的极大子群在 G 中的指数为素数方幂.

引理 1.8 若 H 是 G 的 S-拟正规子群，则 H^G/H_G 是幂零群.

引理 1.9[8] 设 G 为有限群，p 为奇素数，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，若 $N_G(Z(J(P)))$ 有正规 p-补，则 G 有正规 p-补.

2 主要结果

引理 2.1 对于有限单群 G 的每个极大子群 M，有 $\mathrm{Sec}(M)=M$.

证明 由于 G 是有限单群，所以 $G/1$ 是 G 的主因子，并且满足 $1\leq M$. 而且 $G\not\leq M$，又由定义 1.1 知道 $\mathrm{Sec}(M)=(M\cap G)/1=M/1=M$.

引理 2.2 若 M 是群 G 的任意正规极大子群，则有 $\mathrm{Sec}(M)=1$.

证明 设 U/M_G 是 G 的主因子，由 CI-截的定义得到 $\mathrm{Sec}(M)=(M\cap U)/M_G$. 又因为 $M\trianglelefteq G$，所以 $M_G=M$，故 $M\leq U$，从而 $\mathrm{Sec}(M)=1$.

引理 2.3 对于有限可解群 G 的每个极大子群 M，有 $\mathrm{Sec}(M)=1$.

证明 设 U/M_G 是 G 的主因子，由 CI-截的定义知道 $\mathrm{Sec}(M)=(M\cap U)/M_G$. 因为 G 可解，故 U/M_G 是初等交换 p-群，那么 $(M\cap U)/M_G\trianglelefteq U/M_G$. 又因为 $(M\cap U)/M_G\trianglelefteq M/M_G$，所以 $(M\cap U)/M_G\trianglelefteq MU/M_G=G/M_G$. 由于 U/M_G 是 G/M_G 的极小正规子群，故 $(M\cap U)/M_G=1$，即 $\mathrm{Sec}(M)=1$.

定理 2.1 设 M 是 G 的一个极大子群，那么下列命题等价. (1) $\mathrm{Sec}(M)$ 交换; (2) $\mathrm{Sec}(M)$ 是平凡的; (3) M 是 G 的 C-正规子群; (4) $Z(G:M)=|G:M|$; (5) M 有覆盖远离性质 (M 是 G 的 CAP-子群).

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2).

$\Leftarrow$. 结论显然成立.

$\Rightarrow$. 不失一般性，可以设 $M_G=1$ (若 $M_G\neq 1$，考虑 G/M_G). 令 N 是 G 的极小正规子群，由 CI-截的定义知道 $\mathrm{Sec}(M)=M\cap N$，从而 $G=MN$. 由于 $\mathrm{Sec}(M)=M\cap N$ 是交换的，若 $M\cap N\neq 1$，则存在一个素数 p 整除 $|M\cap N|$. 取 $1\neq P\in \mathrm{Syl}_p(M\cap N)$，由于 $M\cap N$ 交换，所以 $P\ \mathrm{char}\ M\cap N\trianglelefteq M$，于是 $M\leq N_G(P)$. 又由 M 的极大性得到 $N_G(P)=M$ 或者 $N_G(P)=G$. 若 $N_G(P)=G$，即 $P\trianglelefteq G$，与 N 的极小性矛盾，故 $N_G(P)=M$. 再证明 $P\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 若否，由引理 1.6 知道存在 $P_1\in \mathrm{Syl}_p(N)$ 使得 $P_1\leq N_N(P_1)\leq N_N(P)=M\cap N$，且 $P<P_1$，与 $P\in \mathrm{Syl}_p(M\cap N)$ 矛盾，因此 $P\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 又因为 $M\cap N$ 交换，所以 $M\cap N\leq C_N(P)$. 考虑到 $C_N(P)\leq N_N(P)=N_G(P)\cap N=M\cap N$，那么 $C_N(P)=N_N(P)$. 由 Burnside 定理知道 N 是 p-幂零的，因此 N 存在有正规 p-补 K，且 $K<N$. 由于 $K\ \mathrm{char}\ N\trianglelefteq G$，所以 $K\trianglelefteq G$，这与 N 的极小正规性矛盾. 所以 $M\cap N=1$，即 $\mathrm{Sec}(M)$ 是平凡.

(2)⇔(3).

⇒.设 U/M_G 是 G 的主因子,故 $M_G \leq M$.而 $U \not\leq M$(如果 $U \leq M$,则 $U \leq M_G$),那么 $\mathrm{Sec}(M)=(M \cap U)/M_G$ 且 $G=MU$.由假设 $M \cap N=M_G$,故对于 $M<G$,存在 G 的一个正规子群 U,使得 $G=MU$ 且 $M \cap N \leq M_G$,即 M 是 G 的 C-正规子群.

⇐.由 C-正规子群的定义知道存在 G 的正规子群 K,使得 $G=MK$ 且 $M \cap K \leq M_G$.令 $U=KM_G$,那么 U/M_G 是 G/M_G 的正规子群,并且有 $M \cap U=M \cap KM_G=M_G(M \cap K)=M_G$,因此 G/M_G 有一个极小正规子群 N/M_G,使得 $N/M_G \leq U/M_G$.又因为 $M_G \leq M \cap N<M \cap U=M_G$,所以 $M \cap N=M_G$,从而 $\mathrm{Sec}(M)=(M \cap N)/M_G=1$.

(2)⇔(4).

由引理 1.3 直接可以得出结论.

(2)⇔(5).

⇒.设 $1=G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_s=G$ 是 G 的一个主群列,则存在 $k<s$ 使得 $G_k \leq M$.而 $G_{k+1} \not\leq M$,由定义 1.1 知道 $\mathrm{Sec}(M)=(M \cap G_{k+1})/G_k$,并且当 $i<k$ 时,有 $MG_{i+1}=M=MG_i$,即 M 覆盖 G_{i+1}/G_i;当 $i>k$ 时,有 $MG_{i+1}=G=MG_i$,即 M 覆盖 G_{i+1}/G_i.

若 $\mathrm{Sec}(M)=1$,那么 $G_{k+1} \cap M=G_k=G_k \cap M$,即 M 远离 G_{k+1}/G_k,因此 M 覆盖或远离 G 的所有主因子,即 M 具有覆盖远离性质.

⇐.反之若 M 覆盖或远离 G_{k+1}/G_k.因为 $MG_{k+1}=G$, $MG_k=M$,所以 M 远离 G_{k+1}/G_k,即 $M \cap G_{k+1}=M \cap G_k=G_k$,从而 $\mathrm{Sec}(M)=1$.

定理 2.2 $\mathrm{Sol}(G)$ 是 G 的最大可解正规子群.

证明 令 $N \trianglelefteq G$,若 $F_s(G/N)=\varnothing$,则 $\mathrm{Sol}(G/N)=G/N$,显然有 $\mathrm{Sol}(G)N/N \leqslant \mathrm{Sol}(G/N)$,于是 $F_s(G/N) \neq \varnothing$.对任意的 $M/N \in F_s(G/N)$,即 $M/N <\cdot\, G/N$ 且 $\mathrm{Sec}(M/N) \neq 1$,由引理 1.2 知道 $M <\cdot\, G$ 且 $\mathrm{Sec}(M) \neq 1$,于是 $M \in F_s(G)$,从而 $\mathrm{Sol}(G) \leq M$,所以 $\mathrm{Sol}(G)N/N \leq M/N$,这说明 $\mathrm{Sol}(G)N/N \leq \mathrm{Sol}(G/N)$.

若 $\mathrm{Sol}(G)=1$,结论显然成立,因此可以假设 $\mathrm{Sol}(G) \neq 1$.由于 $\mathrm{Sol}(G)$ 是 G 的正规子群,于是 G 存在一个极小正规子群 N 包含在 $\mathrm{Sol}(G)$ 中.对 $|G|$ 作归纳可以得到 $\mathrm{Sol}(G/N)$ 可解,所以 $\mathrm{Sol}(G)/N$ 可解.还可以假设 N 是 G 的唯一极小正规子群,这是因为若 N_1 是 G 的另一个极小正规子群,则同样可以得出 $\mathrm{Sol}(G)N_1/N_1$ 可解,从而 $\mathrm{Sol}(G)/(\mathrm{Sol}(G) \cap N_1) \cong \mathrm{Sol}(G)N_1/N_1$ 可解.又由于 $\mathrm{Sol}(G)/(\mathrm{Sol}(G) \cap N_1 \cap N)$ 同构于 $\mathrm{Sol}(G)/(\mathrm{Sol}(G) \cap N_1) \times \mathrm{Sol}(G)/N$ 的一个子群,可知 $\mathrm{Sol}(G)/(\mathrm{Sol}(G) \cap N_1 \cap N)$ 可解.然而 $\mathrm{Sol}(G) \cap N_1 \cap N=1$,所以 $\mathrm{Sol}(G)$ 可解.若 N 非可解,则 $|N|$ 不是素数的方幂.令 p 是 $|N|$ 的最大素因子,且 $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$,那么 $p>2$ 且 $P \ntrianglelefteq N$,因为若 $P \trianglelefteq N$ 可以得到 $P \,\mathrm{char}\, N \trianglelefteq G$,则 $P \trianglelefteq G$,与 N 是 G 的非可解极小正规子群的假设矛盾.由 Frattini 论断知道 $G=N_G(P)N$,又由于 $N_G(P) \leq N_G(Z(J(P)))<G$,故存在 G 的极大子群 M,使得 $N_G(Z(J(P))) \leq M$,于是 $G=N_G(P)N=N_G(Z(J(P)))N=MN$.又由 N 的唯一极小性知道 $M_G=1$,那么有 $\mathrm{Sec}(M)=M \cap N$.如果 $\mathrm{Sec}(M) \neq 1$,即 $M \in F_s(G)$,因此 $N \leq \mathrm{Sol}(G) \leq M$,从而有 $G=MN=M$,这与 $M <\cdot\, G$ 矛盾,所以 $\mathrm{Sec}(M)=M \cap N=1$.又因为 $N_N(Z(J(P)))=N_G(Z(J(P))) \cap N \leqslant M \cap N=1$,显然是 2-闭的.由引理 1.5 得出 N 是 2-闭的,又由奇数阶群可解定理得到 N 可解.再结合 $\mathrm{Sol}(G)/N$ 可解可以知道 $\mathrm{Sol}(G)$ 可解.

设 U 是 G 的任意一个可解正规子群.若 $U \not\leq \mathrm{Sol}(G)$,即存在 $M \in F_s(G)$,使得 $U \not\leq M$.考虑 G 包含 U 的主群列,则存在 N/K 是 G 的主因子,使得 $K \leq M$ 但是 $N \not\leq M$.由于 $U \not\leq M$,故 $K<N<U$,那么由定义 1.1 知道 $\mathrm{Sec}(M)=(M \cap N)/K$.又因为 U 可解,所以 N/K 可解,并且是 G/K 的极小正规子群,所以是初等交换 p-群,从而 $(M \cap N)/K \trianglelefteq N/K$.而 $(M \cap N)/K \trianglelefteq M/K$,所以 $(M \cap N)/K \trianglelefteq MN/K=G/K$,因此 $(M \cap N)/K \trianglelefteq G/K$.由 N/K 的极小性知道 $(M \cap N)/K=1$,即 $\mathrm{Sec}(M)=1$,与 $M \in F_s(G)$ 矛盾,所以 $U \leq \mathrm{Sol}(G)$.这说明 $\mathrm{Sol}(G)$ 是 G 的最大的可解正规子群.

定理 2.3 设 G 是有限群,如果 G 的在 $F^s(G)$ 中的所有极大子群的 CI-截同构,则 G 可解.

证明 假设命题非真,并且设 G 是极小阶反例.又设 N 是 G 的极小正规子群.考虑 G/N,若 $F^s(G/N)=\varnothing$,G/N 自然满足定理 2.3 的条件,因此 $F^s(G/N) \neq \varnothing$.任取 $M/N \in F^s(G/N)$,故 $N_{G/N}(QN/N) \leq M/N$,其中 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.由引理 1.4 知道 $N_G(Q)N/N \leq N_{G/N}(QN/N) \leq M/N$,从而 $N_G(Q) \leq M$,于是 $M \in F^s(G)$.由引理 1.2 知道 G/N 满足定理的条件,由于 G 是极小阶反例,所以 G/N 可解,从而又可以推出 N 是 G 的唯一极小正规子群,这是因为设 N_1 是 G 的另一个极小正规子群,同理上述的证明,我们知道 G/N_1 也是可解的.由于 $G/(N \cap N_1)$ 同构于 $G/N \times G/N_1$ 的一个子群,$G/(N \cap N_1)$ 可解,然

而 $N\cap N_1=1$,所以 G可解.

证明 N 是可解的.否则,因为 $H^s(G)$可解,从而 $N\nsubseteq H^s(G)$,这说明 G存在极大子群 $M\in F^s(G)$,使得 $N\not\leq M$,从而 $G=MN$,那么 $|G:M|=|N:M\cap N|$.又由 N 的唯一极小性知道 $M_G=1$.再由定义 1.1 得到 $\mathrm{Sec}(M)=M\cap N$.现在任意的 $K\in F^s(G)$,且满足 $K_G=1$,这时 $G=KN$,那么 $\mathrm{Sec}(K)=K\cap N$.由假设 $\mathrm{Sec}(M)\cong\mathrm{Sec}(K)$,从而 $|G:K|=|N:K\cap N|=|N:M\cap N|=|G:M|$.这说明每个含在 $F^s(G)$中的且在 G中的核为 1的极大子群在 G中的指数有一个共同的素因子.由引理 1.7得到 G中存在非平凡的可解正规子群 U,由 N 的唯一性知道 $N\leq U$,所以 N 可解,导出矛盾.所以假设不成立,定理 2.3证明完毕.

定理 2.4 若 p是 $|G|$ 的一个素因子,对于群 G 的极大子群 $M\in F^{ps}(G)$,$|\mathrm{Sec}(M)|=q^ar^b$,则 G可解,其中 q, r是两个不同于 p的固定素数.

证明 假设命题不真,且 G是极小阶反例.考虑 G的一个极小正规子群 N.若 $F^{ps}(G/N)=\varnothing$,则 G/N 自然满足定理条件.现在假设 $F^{ps}(G/N)\neq\varnothing$,任取 $M/N\in F^{ps}(G/N)$,那么 $N_{G/N}(QN/N)\leq M/N$,其中 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,还有 $|G/N:M/N|\neq p^{\alpha},\forall\alpha\geq 1$.由引理 1.4知道 $N_G(Q)N/N\leq N_{G/N}(QN/N)\leq M/N$,从而 $N_G(Q)\leq M$.又因为 $|G:M|=|G/N:M/N|\neq p^{\alpha},\forall\alpha\geq 1$,所以 $M\in F^{ps}(G)$.由引理 1.2知道 G/N 满足定理条件,由 G的极小性知道 G/N 可解,从而又可以推出 N 是 G的唯一极小正规子群,并且 N 非可解.令 s为 $|N|$ 的任意素因子,$S\in\mathrm{Syl}_s(N)$,那么 $S\ntrianglelefteq N$.由 Frattini论断知道 $G=N_G(S)N$,又因为 $N_G(S)<G$,所以 G存在极大子群 M 包含 $N_G(S)$,从而 $G=MN$.

证明 $|G:M|\neq p^{\alpha},\forall\alpha\geq 1$.如果 $|G:M|$ 是 p的方幂,那么 $|G:M|=|N:M\cap N|$ 是 p的方幂,从而 $|N|$ 含有素因子 p.取 $P_1\in\mathrm{Syl}_p(N)$,有 $P_1\ntrianglelefteq N$,于是 G存在极大子群 M_1,使得 $N_G(P_1)\leq M_1$,由引理 1.6可以知道存在 $G_p\in\mathrm{Syl}_p(G)$,使得 $N_G(G_p)\leq N_G(P_1)\leq M_1$,所以 $M_1\in F^{ps}(G)$.由 N 的唯一极小性可以得出 $M_{1G}=1$,从而 $\mathrm{Sec}(M_1)=M_1\cap N$.由假设知道 $|M_1\cap N|$ 只含有 q, r两个素因子,并且由于 q, r是两个不同于 p的固定素数,所以有 $1=|G:M_1|_p=|M_1N:M_1|_p=|N:M_1\cap N|_p=|N|_p\neq 1$,导出矛盾.

由上述证明知道 $M\in F^{ps}(G)$.再由 N 唯一极小性可以得出 $M_G=1$,从而 $\mathrm{Sec}(M)=M\cap N$,由定理的假设 $M\cap N$ 的阶只含有两个固定的素因子 q, r,又由于 $S\leq N_N(S)\leq N_G(S)\cap N\leq M\cap N$,故 $s=q$或 r.这说明 N 的阶只含有 q, r两个素因子,由 Burnside定理知道 N 可解,导出矛盾.所以假设不成立,定理 2.4证明完毕.

定理 2.5 设 H是群 G的 S-拟正规子群,如果对于 G的每个极大子群 M,满足 $H\nsubseteq M$,有 M 的 CI-截幂零,则 H可解.

证明 假设命题不真,(G, H)是极小阶反例,故可以假设 $H>1$且非可解.首先证明 H包含 G的一个极小正规子群.假设 H不包含 G的极小正规子群,由 $H_G\trianglelefteq G$和 $H_G\trianglelefteq H$可以得出 $H_G=1$.这是因为若 $H_G\neq 1$,则 H_G必包含 G的一个极小正规子群 N,那么 $N\leq H_G\leq H$,与 H不包含 G的极小正规子群矛盾.又因为 H是 G的 S-拟正规子群,由引理 1.8得到 H^G/H_G是幂零群,从而 H^G是幂零群.由于 $H\leq H_G$,故 H是幂零群,当然 H可解,与 H非可解矛盾.因此 H包含 G的一个极小正规子群.

设 N 是包含在 H中的 G的极小正规子群,并且记 $M^H(G)=\{M<\cdot G|H\nsubseteq M\}$,其中 H是群 G的 S-拟正规子群.证明 $(G/N, H/N)$满足定理假设,并由此得出 H/N 可解.若 $\overline{M}^{\overline{H}}(\overline{G})=\varnothing$,则 $(G/N, H/N)$自然满足定理假设.再由 (G, H)的极小性知道 $\overline{H}$ 可解.故可以设 $\overline{M}^{\overline{H}}(\overline{G})\neq\varnothing$,任取 $\overline{M}\in\overline{M}^{\overline{H}}(\overline{G})$,根据定义可以知道 $\overline{H}\not\leq\overline{M}$,所以 $H\not\leq M$,因此 $M\in M^H(G)$.由定理,假设 $\mathrm{Sec}(M)$幂零,那么根据引理 1.2知道 $\mathrm{Sec}(\overline{M})$也幂零,于是 $(G/N, H/N)$满足定理假设.由于 (G, H)是极小阶反例,H/N 可解,并且还可以断言 N 是 G的唯一极小正规子群.

假设 N 非可解,故 N 不可能是素数幂阶群.设 q是 $|N|$ 的最大素因子,那么 $q>2$.令 $Q\in\mathrm{Syl}_q(N)$,则 Q不正规于 N.由 Frattini论断,$G=N_G(Q)N=N_G(Z(J(Q)))N$,并且 $N_G(Z(J(Q)))<G$,于是存在 G的极大子群 M,使得 $N_G(Z(J(Q)))\leq M$,从而 $G=MN$,且 $N\not\leq M$,当然有 $H\not\leq M$.这说明 $M\in M^H(G)$.由 N 的唯一性得到 $M_G=1$.于是由定义 1.1知道 $M\cap N$ 是 M 的 CI-截.根据定理假设 $M\cap N$ 幂零,而且 $N_N(Z(J(Q)))=N_G(Z(J(Q)))\cap N\leq M\cap N$,故 $N_N(Z(J(Q)))$幂零,特别地 $N_N(Z(J(Q)))$为 q-幂零.由 $q>2$及引理 1.9知 N 也 q-幂零.这与 N 是 G的极小正规子群矛盾,因此 N 必可解.又因为 H/N可解,得出 H可解,导出矛盾,所以假设不成立,定理 2.5证明完毕.

(下转第 337页 Continue on page 337)

H is solvable.

Proof Assume the result is false and let group G be a counterexample. As in the proof of theorem 2.1, there exists a normal subgroup N of G such that G/N has a unique minimal normal subgroup U/N (so $U/N \leq H/N$) which is insolvable. Set q be the largest prime factor dividing $|U/N|$ and $Q/N \in Syl_q(U/N)$. So Q is not normal in U and we can choose a maximal subgroup M of G to contain $N_G(Q)$ and N. By the Frattini argument, $G = N_G(Q)U = MU$, so $U \nsubseteq M$. Observe that $|G: M| = |U: (M \cap U)| \equiv 1 \pmod{q}$, hence $|G: M|$ is composite. So $M \in M_H(G) \cap D(G)$, by the hypothesis, there exists a normal s-completion C of M such that $C/K(C)$ is solvable. By lemma 2.2, we may choose an s-completion $C^* = CN$ of M such that $C^*/k(C^*) = C^*/N$ is solvable, and C^* is a maximal subgroup of UC^*.

Consider the group $E/N = U/N \cdot C^*/N$. Since C^*/N is a normal solvable maximal subgroup of E/N, thus E/C is solvable, consequently U/N is solvable, a contradiction. So the proof is complete.

Corollary 2.5 Suppose G is a finite group, if for every normal maximal subgroup $M \in D(G)$, there exists a normal s-completion C such that $C/k(C)$ is solvable, then G is solvable.

Corollary 2.6 Suppose G is a finite group, if for every normal maximal subgroup $M \in D(G)$, there exists a normal maximal completion C such that $C/k(C)$ is solvable, then G is solvable.

References

[1] Deskin W E. On maximal subgroups[J]. Amer Math Soc, 1959, 1: 100-104.

[2] Deskin W E. A note on the index complex of a maximal subgroup[J]. Arch Math (Basel), 1990, 54: 236-240.

[3] Ballester-Bolincees A, Ezquerro L E. On the index complex of a maximal subgroup of a finite group[J]. Proc Amer Math Soc, 1992, 114: 325-330.

[4] Zhao Yaoqing. On the index complex of a maximal subgroup and the supersolvability of a finite group[J]. Comm Algebra, 1996, 24: 1785-1791.

[5] Li Shirong. The Deskins index complex and the supersolvabilibty of finite groups [J]. J pure Appl Algebra, 1999, 144: 297-302.

[6] Li Shirong, Zhao Yaoqing. On s-completions of maximal subgroups of finite groups [J]. Algebra Collogmum, 2004, 11: 411-420.

[7] Huppert B. Endliche gruppen 1[M]. Berlin: Springer, 1976.

[8] Gorenstein D. Finite group[M]. New York: Chelsea, 1980.

[9] Rose J S. On finite insoluble groups with nilpotent maximal subgroups[J]. J Algebra, 1977, 48: 182-196.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第333页 Continue from page 333)

参考文献:

[1] Deskins W E. On maximal subgroups[J]. Proc Symp Pure Math, 1959, 1: 100-104.

[2] Wang Yanming. C-normality of groups and its properties[J]. Journal of Algebra, 1996, 180: 954-965.

[3] Li Shirong, Wang Yanming. On C-section and C-index of finite groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309-319.

[4] 徐明曜,李慧陵,李世荣,等.有限群导引(上,下)[M].北京:科学出版社,1999.

[5] Petter M R. A note on finite groups having a fixed-point-free automorphism [J]. Proc Amer Math Soc, 1975, 52: 79-80.

[6] 王品超,杨兆兴.有限群极大子群的正规指数[J].工程数学学报,1994,11(1): 42-48.

[7] Zhao Yaoqing. On the deskins completions and theta completions for maximal subgroups [J]. Communications in Algebra, 2000, 28(1): 375-385.

[8] Gorenstein D. Finite groups[M]. New York: Chelsea, 1980.

(责任编辑: 尹 闯)