DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(4): 325~329

弱 c^*-正规子群与有限群的 p-幂零性*

Weakly c^*-normality Subgroups and p-nilpotency of Finite Groups

刘　秀[1],韦华全[2],刘小春[3,4]
LIU Xiu[1], WEI Hua-quan[2], LIU Xiao-chun[3,4]

(1.昭通师范高等专科学校数学系,云南昭通　657000; 2.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁　530001; 3.郴州市永兴一中,湖南郴州　423000; 4.湘南学院,湖南郴州　423000)
(1. Department of Mathematics, Zhaotong Teacher's College, Zhaotong, Yunnan, 657000, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530001, China; 3. No. 1 Middle School of Yongxing, Chenzhou, Hunan, 423000, China; 4. Xiangnan University, Chenzhou, Hunan, 423000, China)

摘要:引入弱 c^*-正规子群的定义,并利用此定义得到有限群 p-幂零的两组充分条件.

关键词:有限群　正规子群　p-幂零
中图法分类号: O152.1　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-9164(2008)04-0325-05

Abstract The definition of weakly c^*-normality subgroups is given, and then two sufficient conditions about p-nilpotent of finite groups are obtained.

Key words finite groups, normality subgroups, p-nilpotent

p-幂零群是局部分析方法中最重要的一类群,它在群的非单性判别中有很好的应用.关于群 p-幂零,较早的结论有 Burnside定理 Frobennius定理及 Itô定理.此后,群论工作者努力寻找各种各样的关于群 p-幂零的充分条件和必要条件.一些学者从减弱正规性条件的角度出发,得到各种减弱条件下的 p-幂零群的充分条件.已知的一些研究 p-幂零群的方法有:利用拟正规性[1,2];利用 S-拟正规嵌入性[3,4];利用 c-正规性[5,6];利用 c-可补性[7~9];利用 c^*-正规性[10],等等.文献[10]中定义的 c^*-正规在很大程度上将群的正规性减弱.本文通过对 c^*-正规子群的观察,引入子群弱 c^*-正规性的定义,得到两组关于 p-幂零性的充分条件.文中 G总表示一个有限群,$M <\cdot G$表示 M是 G的极大子群,其他的符号和术语都是规范的.

收稿日期: 2008-07-09
作者简介:刘　秀(1980-),女,助教,硕士,主要从事群论研究。
* 国家自然科学基金项目(10571181),广西自然科学基金项目(0447038, 0640070),广西教育厅科研基金及广西研究生教育创新计划基金项目(2007106030701M13)资助。

1　基本定义及引理

定义 1.1[10]　设 H是 G的子群,H称为 G的 c^*-正规子群,若存在 G的正规子群 K使得 $G=HK$并且 $H\cap K$是 G的 S-拟正规嵌入子群.

定义 1.2　设 H是 G的子群,H称为 G的弱 c^*-正规子群,若存在 G的次正规子群 K使得 $G=HK$并且 $H\cap K$是 G的 S-拟正规嵌入子群.

引理 1.1[11,12]　G是群且 $A\leq K\leq G$, $B\leq G$,则(1)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 $B\trianglelefteq\trianglelefteq G$,则 $\langle A,B\rangle\trianglelefteq\trianglelefteq G$; (2) $A\trianglelefteq G$且 $K/A\trianglelefteq\trianglelefteq G/A$的充分必要条件是 $K\trianglelefteq\trianglelefteq G$; (3)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$,则 $A\cap B\trianglelefteq\trianglelefteq B$; (4)若 A为 G的次正规 Hall-子群,则 $A\trianglelefteq G$; (5)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 B为 G的 π-Hall子群,则 $A\cap B$为 A的 π-Hall子群; (6)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 A为 G的 π-子群,则 $A\leq O_{\pi}(G)$; (7)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 $|G:A|$为 p'-数,则 A包含 G的所有的 Sylow p-子群; (8)若 $A\trianglelefteq\trianglelefteq G$且 $B\cdot\trianglelefteq G$,则 $B\leq N_G(A)$.

引理 1.2[10]　设 G是群,p是 $|G|$的素因子且 $(|G|, p-1)=1$,则(1)若 N是 G的 p阶正规子群,

则 N 包含于 $Z(G)$; (2)若 G有循环的 Sylow p-子群,则 G为 p-幂零群; (3)若 M是 G的指数为 p的子群,则 M在 G中正规.

引理 **1.3**[10] 设 N是群 G的正规子群, H是群 G的 p-子群, K是 G的子群并使得 $G= HK$.如果 $H\cap N$是 N的 Sylow$p$-子群,那么 $HN\cap KN = (H\cap K)N$.

引理 **1.4**[10] 设 M是群 G的极大子群, P是 G的正规 p-子群并使得 $G= PM$,其中 p是 $|G|$ 的素因子,则 (1) $P\cap M4\ G$; (2)若 $p> 2$且 P的极小子群在 G中正规,则 $|G:M| = p$.

引理 **1.5**[13] 设 G是 c-可分解群, $\overline{G} = G/O_{c'}(G)$,则 $C_{\overline{G}}(O_c(\overline{G}))\leq O_c(\overline{G})$.特别地,若 $O_{c'}(G) = 1$,则 $C_G(O_c(G))\leq O_c(G)$.

引理 **1.6**[4,14] 设 G是群, $N4\ G$, H为 G的 S-拟正规嵌入子群,则 (1) $H\leq M\leq G$, H在 M中 S-拟正规嵌入; (2) HN在 G中 S-拟正规嵌入, HN/N在 G/N中 S-拟正规嵌入; (3) H是 G的 S-拟正规 p-子群,则 $O^p(G)\leq N_G(H)$; (4)若对某个素数 p, $H\leq O^p(G)$,则 H在 G中 S-拟正规; (5) H在 G中 S-拟正规且 $H_G = 1$,则 H的 Sylow 子群在 G中 S-拟正规.

引理 **1.7** 设 G是群, $N4\ G$, H为 G的弱 c^*-正规子群,则 (1) $H\leq M\leq G$, H在 M中弱 c^*-正规; (2)若 $H\leq G$,则 H/N在 G/N中弱 c^*-正规; (3)设 c是一个素数集合,若 H是 c-子群,而 N为 c'-子群,则 HN/N在 G/N中弱 c^*-正规; (4)设 $H\leq G$且 $H\leq$ H(L),则 H在 G中 S-拟正规嵌入, $L\leq G$且 $H\leq L$.

证明 由题设知道,存在子群 $K4\ 4\ G$使得 $G= HK$且 $H\cap K$在 G中 S-拟正规嵌入,那么有

(1) $M= G\cap M= HK\cap M= H(K\cap M)$.由引理 1.6有 $H\cap(K\cap M) = H\cap K$在 M中 S-拟正规嵌入.又由引理 1.1有 $K\cap M4\ 4\ M$,故 H在 M中弱 c^*-正规.

(2) $G/N= (H/N)(KN/N)$.由引理 1.6有 $H/N\cap KN/N= (H\cap K)N/N$在 G/N中 S-拟正规嵌入.又因为 $K4\ 4\ G$,所以 $KN4\ 4\ G$.由引理 1.1有 $KN/N4\ 4\ G/N$,故 H/N在 G/N中弱 c^*-正规.

(3)容易知道 $N\leq K$,且 $G/N= (HN/N)(KN/N)$,从而 $HN/N\cap K/N = (H\cap K)N/N$在 G/N中 S-拟正规嵌入.又由引理 1.1有 $K/N4\ 4\ G/N$,所以 HN/N在 G/N中弱 c^*-正规.

(4)由 $L= HK\cap L= H(L\cap K)$及 $H\leq$H(L)得出 $L\cap K= L$,于是 $H\leq$H$(L)\leq L\leq K$.所以 $G= HK = K$,而 $H= H\cap K$在 G中 S-拟正规嵌入.引理 1.7证明完毕.

引理 **1.8**[10] 设 G是群, $H4\ G$使得 G/H为 p-幂零, $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$.若 $|P|\leq p^2$且下列条件之一满足,则 G为 p-幂零.(1) $p= \min$c(G)且 G与 A_4无关; (2) $(|G|, p^2-1)= 1$; (3) $N_G(P)$为 p-幂零.

2 主要结果

定理 **2.1** 设 G是群, $H4\ G$使得 G/H为 p-幂零, $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$.若 P的极大子群皆在 G中弱 c^*-正规且下列条件之一成立,则 G为 p-幂零.(a) $(|G|, p-1) = 1$; (b) $N_G(P)$为 p-幂零.

证明 设 G为极小反例,那么有

(1) $O_{p'}(G)= 1$.

如果 $T= O_{p'}(G)\neq 1$,考虑 $\overline{G}= G/T$.因为 G/H是 p-幂零,所以 $\overline{G}/\overline{H}\cong G/HT$亦是 p-幂零的,其中 $\overline{H}= HT/T$.设 $\overline{P_1}= P_1T/T<\cdot PT/T$,其中 $P_1<\cdot P$.因为 P_1在 G中弱 c^*-正规,由引理 1.7可以知道 $\overline{P_1}$在 $\overline{G}$中弱 c^*-正规.由 G的极小性推出 $\overline{G}$为 p-幂零,所以 G也是 p-幂零,矛盾,所以 $O_{p'}(G)= 1$.

(2) $H= G$.

事实上,因为 H满足定理的条件,那么若 $H< G$,则 H为 p-幂零.此时, (1)蕴含 $H= P$.若条件 (b)成立,则 $N_G(P)= G$为 p-幂零群,矛盾.下面设条件 (a)成立.若 $PO^p(G)< G$,因为 $PO^p(G)$也满足定理 2.1的条件,故 $PO^p(G)$为 p-幂零.这与 (1)矛盾,故 $PO^p(G)= G$.设 N是 G的包含于 P的极小正规子群.容易知道 G/N满足定理 2.1的条件,所以 G/N为 p-幂零.现在可以设 N是 G的包含于 P的唯一的极小正规子群且 $N\nleq$ H(G).于是存在 $M<\cdot G$使得 $G= NM$且 $N\cap M= 1$.但是 $P\cap G4\ G$,故 $P\cap M= 1$,从而 $N= P$.现在又设 $P_1<\cdot P$.由题设可以知道存在 $K_14\ 4\ G$使得 $G= P_1K_1$且 $P\cap K_1$是 G的 S-拟正规嵌入子群.由引理 1.6知道 $P\cap K_1$在 G中 S-拟正规, $P\cap K_1$被 $O^p(G)$正规化.又由引理 1.1知道 $P\leq N_G(K_1)$,所以 $P\cap K_1$也被 P正规化.由此可以得到 $P\cap K_14\ G$, $P\cap K_1= 1$.由 $P\leq N_G(K_1)$还可以得出 $1< P\cap K_14\ G$,故 $P\cap K_1= P$,即 $P\leq K_1$.由此得到 $P_1= 1$, P是 p阶循环群.由引理 1.2可以知道 $P\leq Z(G)$.所以由 G/P为 p-幂零立即得到 G为 p-幂零.这个矛盾表明 (2)必定成立.

(3) G有唯一的极小正规子群 N使得 G/N为

p-幂零且 $N \not\leq \mathrm{H}(G)$.

设 $N \trianglelefteq\!\cdot\; G$, $\overline{G}=G/N$. 显然 $\overline{P}=PN/N\in \mathrm{Syl}_p(\overline{G})$. 设 $\overline{P_1}=P_1N/N<\!\cdot\;\overline{P}$, 其中 $P_1<\!\cdot\; P$, 则 $P_1\cap N=P\cap N\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 由假设, 存在 $K_1 \trianglelefteq\trianglelefteq G$ 使得 $G=P_1K_1$ 且 $P_1\cap K_1$ 在 G 中 S-拟正规嵌入. 利用引理 1.3, 有 $P_1N\cap K_1N=(P_1\cap K_1)N$. 于是又由引理 1.6 可以知道 $P_1N/N\cap K_1N/N$ 在 G/N 中 S-拟正规嵌入, 即 $\overline{P_1}$ 在 $\overline{G}$ 中弱 c^*-正规. 若 $(|G|,p-1)=1$, 则同样有 $(|\overline{G}|,p-1)=1$. 若 $N_G(P)$ 为 p-幂零, 则 $N_{\overline{G}}(\overline{P})=N_G(P)N/N$ 亦为 p-幂零. 故 $\overline{G}$ 满足定理 2.1 的条件. G 的选择性蕴含 $\overline{G}$ 为 p-幂零, 于是 G 有唯一极小正规子群 N 使得 G/N 为 p-幂零且 $N\not\leq \mathrm{H}(G)$.

(4) $O_p(G)=1$.

若否, 则由 (3) 有 $N\leq O_p(G)$, 而且存在 $M<\!\cdot\; G$ 使得 $G=NM$ 且 $N\cap M=1$. 由引理 1.4 有 $O_p(G)\cap M\trianglelefteq G$, 故 $O_p(G)\cap M=1$ 而 $N=O_p(G)$. 因为 $P\cap M<P$, 可以设 $P\cap M\leq P_1<\!\cdot\; P$, 则 $P_1\cap M=P\cap M$. 由假设有 $G=P_1K_1$, $K_1\trianglelefteq\trianglelefteq G$ 且 $P_1\cap K_1$ 在 G 中 S-拟正规嵌入. 这样 $P_1\cap K_1\in \mathrm{Syl}_p(K)$ 而 K 在 G 中 S-拟正规. 若 $K_G\neq 1$, 则由 (3) 有 $N\leq K_G$. 于是 $P=NP_1\leq P_1$, 矛盾. 故 $K_G=1$. 现在由引理 1.6 知道 $P_1\cap K_1$ 在 G 中 S-拟正规, 所以 $P_1\cap K_1\leq O_p(G)=N$ 且 $P_1\cap K_1$ 被 $O^p(G)$ 正规化. 若 $N\cap (K_1)_G=1$, 则因为 $G=P_1K_1$ 且 $K_1\trianglelefteq\trianglelefteq G$, 又由引理 1.1 知道 K_1 包含 G 的所有 Sylow q-子群 $q\neq P$, 即 $O^p(G)\leq (K_1)_G\leq K_1$, 从而 $G/(K_1)_G$ 为 p-群, 因此 $G=G/N\cap (K_1)_G\lesssim G/N\times G/(K_1)_G$ 为 p-幂零, 矛盾. 所以 $N\cap (K_1)_G=N$, 即 $N\leq (K_1)_G\leq K_1$, 从而 $P_1\cap K_1\leq P_1\cap N\leq P_1\cap K_1$, 由此得出 $P_1\cap K_1=P_1\cap N$ 被 P 正规化. 类似 (2) 可以证明 $G=PO^p(G)$. 所以 $P_1\cap K_1\trianglelefteq G$, 即 $P_1\cap K_1\leq K_G=1$, 这样 $P_1\cap K_1=1$, $|P\cap K_1|=p$. 由引理 1.1 有 $P\cap K_1\in \mathrm{Syl}_p(K_1)$. 这表明 K_1 的 Sylow p-子群为 p-阶循环群. 又由于 $N\leq P\cap K_1$, 当然, N 也是 p-阶循环群. 若条件 (a) 成立, 则由引理 1.2 知道 $N\leq Z(G)$. 这样由 G/N 为 p-幂零可以得出 G 自身亦为 p-幂零, 矛盾. 以下设条件 (b) 成立. 既然 G/N 为 p-幂零, G 为 p-可解的, 从而由引理 1.5 知道 $N\leq C_G(N)\leq N$, 即 $N=C_G(N)$. 现在 $M\cong G/N=G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)$, 故 M 为交换群, 进而 M 正规化 $P\cap M$. 这样 $P=N(P\cap M)\trianglelefteq G$, 而 $N_G(P)=G$ 为 p-幂零, 也导出矛盾.

综上所述, 有 $NP=G$. 事实上, 若 $NP<G$, 则 NP 为 p-幂零, 这是因为 NP 满足定理 2.1 的条件. 这样, N 为 p-幂零, 由 (1) 知道 N 为非平凡 p-群, 这又与 (4) 矛盾. 所以必然有 $NP=G$. 若对任意 $P_1<\!\cdot\; P$ 都有 $NP_1<G$, 则 $(P\cap N)P_1<P$, 那么有 $P\cap N\leq P_1$. 所以 $P\cap N\leq \mathrm{H}(P)$, 由 Tate 定理[15]知道 N 为 p-幂零, 同样可以导出矛盾. 故有 $P_1<\!\cdot\; P$ 使得 $G=NP_1$. 由假设知道 $G=P_1K_1$, $K_1\trianglelefteq\trianglelefteq G$ 且 $P_1\cap K_1$ 在 G 中 S-拟正规嵌入. 所以 $P_1\cap K_1$ 是 G 的某个 S-拟正规子群 K 的 Sylow 子群. 假定 $K_G\neq 1$, 则 $N\leq K_G$, 这样 $P_1\cap K\cap N\in \mathrm{Syl}_p(N)$. 从而由 $G=NP_1$ 知道 $P_1\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 矛盾, 因而 $K_G=1$. 现由引理 1.6 知道 $P_1\cap K_1$ 在 G 中 S-拟正规, 所以 $P_1\cap K_1\leq O_p(G)$, $P_1\cap K_1=1$. 再次应用引理 1.1, 有 $|K_1|_p=p$. 若条件 (a) 成立, 则由引理 1.2 可以知道 K_1 为 p-幂零. 若 $N\cap (K_1)_G=1$, 则由引理 1.1 知道 K_1 包含 G 的所有的 Sylow q-子群, 从而 $G/(K_1)_G$ 为 p-群, 这样 $G=G/N\cap (K_1)_G\lesssim G/N\times G/(K_1)_G$ 为 p-幂零, 矛盾. 所以 $N\cap (K_1)_G=N$, $N\leq (K_1)_G\leq K_1$, 这样 N 亦为 p-幂零的. 类似可导以出矛盾. 于是可以设 $p<2$ 且条件 (b) 成立. 记 $M=N_G(Z(J(P)))$, 其中 $J(P)$ 是 P 的 Thompson 子群. 若 $M<G$, 因为 $N_G(P)\leq M$, 故 M 满足定理的条件, M 为 p-幂零. 由 Glauberman-Thompson p-幂零准则, G 也是 p-幂零的, 矛盾. 所以 $M=G$, $Z(J(P))\trianglelefteq G$, 这与 (4) 矛盾. 定理 2.1 证明完毕.

推论 2.1 设 G 是群, $H\trianglelefteq G$ 使得 G/H 为 p-幂零, $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$. 若 P 的极大子群皆在 G 中 c^*-正规且下列条件之一成立, 则 G 为 p-幂零. (a) $(|G|,p-1)=1$; (b) $N_G(P)$ 为 p-幂零.

定理 2.2 G 是群, $H\trianglelefteq G$ 使得 G/H 为 p-幂零, $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$. 若 P 的 2-极大子群皆在 G 中弱 c^*-正规且下列条件之一成立, 则 G 为 p-幂零. (a) $p=\min\pi(G)$ 且 G 与 A^4 无关; (b) $(|G|,p^2-1)=1$; (c) $N_G(P)$ 为 p-幂零.

证明 假设定理不真, 同时令 G 为极小阶反例. 首先有

(1) $O_{p'}(G)=1$.

如果 $T=O_{p'}(G)\neq 1$, 考虑 $\overline{G}=G/T$. 因为 G/H 是 p-幂零, 所以 $\overline{G}/\overline{H}\cong G/HT$ 亦是 p-幂零的, 其中 $\overline{H}=HT/T$. 设 $\overline{P_1}=P_1T/T<\!\cdot\; PT/T$, 其中 $P_1<\!\cdot\; P$. 因为 P_1 在 G 中弱 c^*-正规, 由引理 1.7 知道 $\overline{P_1}$ 在 $\overline{G}$ 中弱 c^*-正规. 再由 G 的极小性推出 $\overline{G}$ 为 p-幂零, 所以 G 也是 p-幂零, 矛盾, 所以 $O_{p'}(G)=1$.

(2) G的包含 P的真子群皆为 p-幂零. 特别地, $G=PO^p(G)$.

设 $P\le M<G$. 由引理1.7知道 P的2-极大子群均在 M中弱 c^*-正规. 容易证明 M也满足定理2.2的其他条件,这样 M为 p-幂零. 若 $PO^p(G)<G$,则 $PO^p(G)$为 p-幂零. 特别地, $O^p(G)$为 p-幂零. 此时, $O^p(G)$的正规 p-补也是 G的正规 p-补,这不可能成立. 故有 $PO^p(G)=G$.

(3) $H=G$.

若不然, $H<G$. 由(2)知道 H为 p-幂零的. 此时,(1)中蕴含 $H=P$. 若条件(c)成立,则立即得到 $G=N_G(P)$为 p-幂零,矛盾. 下面对条件(a)和条件(b)进行讨论. 设 N为 G的包含于 P的极小正规子群,不难证明 G/N满足定理的条件,由 G的极小性得到 G/N为 p-幂零. 现在可以设 N是 G的包含于 P的唯一的极小正规子群且 $P\cap\Phi(G)=1$,于是存在 $M\lessdot G$使得 $G=NM$且 $N\cap M=1$. 但是 $P\cap M\trianglelefteq G$,故 $P\cap M=1$,从而 $N=P$, $P\le C_G(P)$. 若 $C_G(P)<G$,则由(2)知道 $C_G(P)$为 p-幂零. 因为 $C_G(P)\trianglelefteq G$,故根据(1)可以知道 $C_G(P)=P$. 由引理1.8,可以设 $|P|>p^2$. 取 P的2-极大子群 P_0,由题设知道存在 $K_0\trianglelefteq\trianglelefteq G$使得 $G=P_0K_0$且 $P_0\cap K_0$是 G的 S-拟正规嵌入子群. 根据引理1.6,知道 $P_0\cap K_0$在 G中 S-拟正规, $P_0\cap K_0$被 $O^p(G)$正规化. 又由引理1.1有 $P\le N_G(K_0)$,所以 $P_0\cap K_0$也被 P正规化. 故由(2)知道 $P_0\cap K_0\trianglelefteq G$,这就得到 $P_0\cap K_0=1$. 另一方面, $P\cap K_0\trianglelefteq G$. 故由 P的极小性得到 $P\cap K_0=P$,即 $P\le K_0$. 进一步得出 $P_0=1$,即 $|P|=p^2$,矛盾,所以(3)成立.

(4) $O_p(G)=1$.

若否,设 $N\cdot\trianglelefteq G$且 $N\le O_p(G)$. 容易证明 G/N为 p-幂零. 所以可以设 N是含于 $O_p(G)$的唯一极小正规子群且 $O_p(G)\cap\Phi(G)=1$,于是存在 $M\lessdot G$使得 $G=NM$且 $N\cap M=1$. 容易得出 $N=O_p(G)$. 显然, $P\cap M<P$. 故可以设 $P\cap M\le P_1\lessdot P$,则 $P_1=(P_1\cap N)(P\cap M)$, $P\cap M=P\cap M$. 于是 $|N:P_1\cap N|=|N(P\cap M):(P_1\cap N)(P\cap M)|=|P:P_1|=p$,即 $P_1\cap N\lessdot N$. 若 $P\cap M=1$,则 $P=N$,类似(3)的证明可以导出矛盾. 以下设 $P\cap M\neq1$并取 $P_2\lessdot P\cap M$. 因为 $P_1\cap N\trianglelefteq P$, $P_0=(P_1\cap N)P_2$是 P的2-极大子群. 由题设知道存在 $K_0\trianglelefteq\trianglelefteq G$使得 $G=P_0K_0$且 $P_0\cap K_0$在 G中 S-拟正规嵌入,于是存在 G的 S-拟正规子群 K使得 $P_0\cap K_0$是 K的 Sylow p-子群. 若 $K_G\neq1$,考虑 $G_1=PK_G$. 若 $G_1<G$,由(2)得出 G_1为 p-幂零,特别地, K_G为 p-幂零. 由(1)可以知道 K_G为 p-群,进一步由 N的唯一性得出 $N\le K_G$,导致 $P=NP_1\le P_1$,矛盾. 故 $G=G_1$, G/K_G为 p-群,从而 $G/N\cap K_G$为 p-幂零群. 由 N的极小性得到 $N\cap K_G=N$,即 $N\le K_G$,同样可以推出矛盾. 这样 $K_G=1$. 由引理1.6知道 $P_0\cap K_0$在 G中 S-拟正规,于是 $P_0\cap K_0\le N$且 $O^p(G)\le N_G(P_0\cap K_0)$. 另外,若 $N\cap(K_0)_G=1$,由引理1.1知道 K_0包含 G的所有的 Sylow q-子群,所以 $G/(K_0)_G$为 p-群,从而 $G/N\cap(K_0)_G$为 p-幂零,矛盾. 所以 $N\cap(K_0)_G=N$,即 $N\le(K_0)_G\le K_0$,而又由 $P_0\cap K_0\le P_0\cap N\le P_0\cap K_0$可以得出 $P_0\cap K_0=P_0\cap N\trianglelefteq P$. 进一步得到 $P_0\cap N\trianglelefteq G$,但是 $P_0\cap N\le P_1$,故由 N的极小性得到 $P_0\cap N=1$. 当然 $P\cap N=1$,但是 $P\cap N\lessdot N$,故 $|N|=p$. 若条件(a)或者条件(b)成立,则直接由引理1.8得到 G为 p幂零群,矛盾. 若条件(c)成立,则由 $M\cong G/N=G/C_G(N)$交换可以知道 M正规化 $P\cap M$,从而 $P=N(P\cap M)\trianglelefteq G$,于是 $G=N_G(P)$为 p-幂零群,与假设矛盾.

综上所述,取 $N\cdot\trianglelefteq G$,容易证明 G/N为 p-幂零的. 若 $NP<G$,则由(2)知道 NP为 p-幂零. 这样, N为 p-幂零,由(1)知道 N为非平凡 p-群,这又与(4)矛盾,所以必然有 $NP=G$. 设 $|P|=p^n$. 由引理1.8,可以设 $n\ge3$. 这就是说, P的任意2-极大子群 $P_0\neq1$. 由题设知道存在 $K_0\trianglelefteq\trianglelefteq G$使得 $G=P_0K_0$且 $P_0\cap K_0$在 G中 S-拟正规嵌入,于是存在 G的 S-拟正规嵌入 K使得 $P_0\cap K_0$是 K的 Sylow p-子群. 假设 $K_G\neq1$,由(1),(2)和(4)容易知道 $G=PK_G$. 又显然 $1<P\cap K_G<P$. 取 $P\cap K_G\le P_1\lessdot P$,则 P_1是 $G_1=P_1K_G$的 Sylow p-子群. 由题设知道 P_1的极大子群在 G中,从而在 G_1中弱 c^*-正规. 如果条件(a)或条件(b)成立,则由定理2.1得出 G_1为 p幂零,当然 K_G为 p-幂零,从而由(1)和(4)得到 $K_G=1$,矛盾. 如果条件(c)成立,因为 $P\le N_G(P_1)<G$,故由(2)知道 $N_G(P_1)$为 p-幂零,从而 $N_{G_1}(P_1)$亦为 p-幂零. 利用定理2.1有 G_1为 p-幂零. 特别地, K_G为 p-幂零也导出矛盾. 所以 $K_G=1$. 由引理1.6有 $P_0\cap K_0$在 G中 S-拟正规,于是 $P_0\cap K_0\le O^p(G)$. 由(4)及 $P_0\cap K_0=1$,有 $|P\cap K_0|=p^2$. 由引理1.1知道 $P\cap K_0\in\mathrm{Syl}_p(K_0)$. 若条件(a)或条件(b)成立,则直接由引理1.8知 K_0为 p-幂零. 若 $N\cap(K_0)_G=1$,由引理1.1知 K_0包含 G的所有的 Sylow q-子群,所以 $G/(K_1)_G$为 p-幂零,从而 $G\cong G/N\cap(K_0)_G$为 p-幂零,矛盾. 所以 $N\cap(K_0)_G=N$,即 $N\le(K_0)_G\le K_0$,因此 N为 p-幂零,类似的证明可以推出矛盾. 现在设条件(c)成立,

那么有 $P\cap N\leq P\cap K_0$,所以 $|P\cap N|\leq p^2$.显然 $P\cap N>1$,否则 NP 为 p-幂零,可以得出 G 为 p-幂零,矛盾.这样由(4)有 $P\leq N_G(P\cap N)<G$.由(2)有 $N_G(P\cap N)$ 为 p-幂零.当然 $N_N(P\cap N)$ 为 p-幂零,又由引理1.8可以得出 N 为 p-幂零,同样可以导出矛盾.定理2.2证明完毕.

推论2.2 G 是群,$H\trianglelefteq G$ 使得 G/H 为 p-幂零,$P\in Syl_p(H)$.若 P 的2-极大子群皆在 G 中 c^*-正规且下列条件之一成立,则 G 为 p-幂零.(a) $p=\min\pi(G)$ 且 G 与 A_4 无关;(b) $(|G|,p^2-1)=1$;(c) $N_G(P)$ 为 p-幂零.

参考文献:

[1] LI S. On minimal subgroups of finite groups[J]. Comm Algebra, 1994, 22: 1913-1918.

[2] Asaad M, Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. A note on minimal subgroups of finite groups[J]. Comm Algebra, 1996, 24: 2771-2776.

[3] Asaad, Heliel A A. On S-quasinormally embeded subgroups of finite groups[J]. J Pure Appl Algebra, 2001, 165: 129-135.

[4] Li Y, Wang Y, Wei H. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups c-quasinormally embeded[J]. Acta Math Hungar, 2005, 108(4): 283-298.

[5] Wang Y. The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups[J]. Acta Math Sinica, 2000, 161(1): 63-70.

[6] Wei H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups[J]. Comm Algebra, 2001, 29: 2193-2200.

[7] Wang Y, Wei H, Li Y. A generalization of Kramer's theorem and its applications[J]. Bull Austral Math Soc, 2002, 65: 467-475.

[8] Wang Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented[J]. J Algebra, 2000, 224: 467-478.

[9] Guo X, Shum K. On p-nipotency of finite groups with some subgroups c-supplemented[J]. Algebra Colloquium, 2003, 10(3): 259-266.

[10] 韦华全.子群特性与有限群结构[D].广州:中山大学,2006.

[11] Doerk K, Hawkes T. Finite soluble groups[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[12] Wielandt H. Subnormal subgroups and permutation groups[C]. Columbus, Ohio: Lectures given at the Ohio State University, 1971.

[13] Gorenstein D. Finite groups[M]. New York: Chelsea, 1980.

[14] Ballester-Bolinches A, Pedraza Aguilera M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups[J]. J Pure Appl Algebra, 1998, 127: 113-118.

[15] Huppert B. Endliche gruppen I[M]. New York: Springer-Verlag, 1967.

(责任编辑:尹 闯)

科学家利用PMCA技术培育出跨界朊病毒

朊蛋白被认为是一种威胁人类公共卫生的致命病毒。朊蛋白导致可遗传的海绵状脑病。牛海绵状脑病从牛传染到人类后导致超过200例的变种疯牛病,即克雅氏病(vCJD)。最近科学家在试管中培育出能够跨越物种屏障的有传染性的朊蛋白新变体。

导致可遗传海绵状脑病的朊蛋白中包括自然形成的细胞朊蛋白(PrPC)的一种错误折叠的形式(PrPSc)。与PrPC不同,PrPSc形成的原纤维能够对这种致命疾病产生病理学作用,例如羊的痒病和鹿的慢性萎缩病。科学家们在试管中利用一种名为蛋白质——错误折叠循环放大(PMCA)技术,将具有1:50或1:200的小鼠大脑均匀混合稀释物的PMCA加入10%的健康仓鼠大脑均匀混合物,合成一种抗蛋白酶的仓鼠PrPSc。实验研究发现,仓鼠PrPC不但能够转化为错误折叠的朊蛋白,并且新产生的朊蛋白与导致仓鼠痒病的仓鼠PrPSc是不同的。在试管中产生的仓鼠朊蛋白增强了蛋白酶的抗性,并导致了一种仓鼠的疾病——具有变化的孵化期以及由仓鼠痒病PrPSc造成的不同的脑损伤模式。科学家们还利用仓鼠PrPSc大脑均匀混合物作为一个模板,利用PMCA形成了一种来自小鼠PrPC的新的鼠科动物致病朊蛋白。

PMCA技术对于研究新的人类朊蛋白是否源于人类PrPC与来自不同动物而且能够导致疾病的朊蛋白的混合是非常有用的。利用PMCA技术科学家培育出跨界朊病毒为有效治疗人类克雅氏病提供帮助。

(据科学网)