DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.03.009
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(3): 231～232

无三边形极小 3连通图的非基本边数

The Number of Non-essential Edges in Triangle-free Minimally 3-Connected Graphs

潘玉美
PAN Yu-mei

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要: 给出无三边形极小 3连通图 G的非基本边数的下界 $|G|+3$,并证明图 G的非基本边数达到下界当且仅当 G同构于 $K_{3,3}$.

关键词: 连通图 无三边形 非基本边
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)03-0231-02

Abstract A lower for the number of non-essential edges of the triangle-free minimally 3-connected graph and the characterization of the graph that reach the lower bound are given.

Key words connected graph, triangle-free, non-essential edge

文献 [1]引进非基本边和极小 3连通图的概念,给出极小 3连通图的非基本边数的下界,并刻画出达到下界时的图类. 本文给出无三边形极小 3连通图的非基本边数的下界,并证明图的非基本边数达到下界当且仅当图同构于 $K_{3,3}$.

1 预备知识

本文讨论的图都是有限、无向简单图,未说明的术语和记号参见文献 [1, 2].

设 G是一个 3连通图, $T\subseteq V(G)$,如果 $G-T$不是连通图,则称 T为 G的点割. 设 T是 G的点割并且 $|T|=\kappa(G)$,则称 T是 G的一个最小点割,其中 $\kappa(G)$是 G的连通度. 如果 F是 $G-T$的至少一个连通分支但不是全部连通分支的并,则称 F是 G的断片,也称为 T-断片. 设 F是 G的断片, $\overline{F}=V(G)-(F\cup N_G(F))$,则 $\overline{F}$也是 G的断片,并且 $N(F)=T=N(\overline{F})$. Γ_G表示图 G中所有最小点割的集合, G中所有有序对 (T,F)的集合记为 $\Gamma_f(G)$,其中 T是 G的最小点割, F是 T-断片. 若 F是 G的断片,但是 F的任何真子集都不是 G的断片,则称 F为 G的端片, G中基数最小的断片称为 G的原子. 如果 F是 G的断片且 $N(F)$中有边,就称 F是 $E(G)$-断片, $E(G)$-原子与 $E(G)$-端片可类似定义. 如果 $x\in V(G)$, F是 G的断片且 $x\in N(F)$, $N(F)$中有边,就称 F是 x-$E(G)$-断片,可类似定义 x-$E(G)$-原子.

性质 1[3] 设 $(T,F)\in\Gamma_f(G)$, $(T',F')\in\Gamma_f(G)$,如果 $F\cap F'\neq\emptyset$,则有 $|F\cap T'|\geqslant|\overline{F'}\cap T|$, $|F'\cap T|\geqslant|\overline{F}\cap T'|$;如果 $F\cap F'\neq\emptyset\neq\overline{F}\cap\overline{F'}$,那么 $F\cap F'$与 $\overline{F}\cap\overline{F'}$都是 G的断片,并且 $N(F\cap F')=(T\cap F')\cup(T\cap T')\cup(F\cap T')=N(\overline{F}\cap\overline{F'})$;如果 $F\cap F'\neq\emptyset$且 $F\cap F'$不是断片,则 $|F\cap T'|>|\overline{F'}\cap T|$, $|F'\cap T|>|\overline{F}\cap T'|$, $\overline{F}\cap\overline{F'}=\emptyset$.

由文献 [1]有引理 1～4.

引理 1 极小 3连通图 G中的边 e是基本边,当且仅当 e在 G的一个三边形中或者 G中有包含 e的 3点割.

引理 2 设 G是不为轮的极小 3连通图, e是 G的一条基本边,则下列三者之一成立.

(1) e在 G的一个非平凡扇中,该扇的两条端边都是非基本边.

(2) e恰在 G的一个平凡扇中,该扇的两条端边都是非基本边.

(3) e在 G的两个平凡扇中, e是它们的公共边,并且这两个扇的其余边都是非基本边.

引理 3 设 $x\in V(\overset{*}{G})$, $x\in W_1$,则 x至少包含

收稿日期: 2007-09-10
作者简介: 潘玉美 (1974-),女,讲师,主要从事图论与组合研究工作.

在 G的一个三边形中.

引理 4 设 $x\in V(G^*)$, $x\in W_0$,则 x至少包含在 G的 2个三边形中.

引理 3和引理 4中 G^* 指的是简约极小 3连通图.

引理 5 无三边形极小 3连通图 G的每一个顶点至少关联 2条非基本边.

证明 设 $x\in V(G)$,如果 $d(x)\geqslant 4$,因为 G中无三边形,所以 x不在三边形中,由引理 3和引理 4知 $x\notin W_0\cup W_1$,因而 x关联至少 2条非基本边.如果 $d(x)=3$,设 $xy\in E(G)$且 xy是基本边,因为 x不在三角形中,由引理 2知 xy在 I-型扇中,所以 x与 2条非基本边关联.

推论 1 无三边形极小 3连通图 G中存在一个圈 C, C上每一条边都是非基本边.

引理 6 设 G为无三边形极小 3连通图, $(T,F)\in\Gamma_f(G)$, F是一个 $E(G)$-断片(即 T中包含有边),则 $|F|\geqslant 3$,且当 $|F|=3$时,存在一个 $x\in T$,使得 $|N(x)\cap V(F)|\geqslant 2$.

证明 如果 $|F|\leqslant 2$,容易看出 $G[V(F)\cup T]$中有三边形,矛盾.如果 $|F|=3$,则 F是一条路,设 $F=abc$.令 $T=\{x,y,z\}$,其中 $xy\in E(G)$,由于 $|N(a)\cap T|\geqslant 2$, G中无三边形,可设 $ax\in E(G)$,因而 $ay\notin E(G)$, $az\in E(G)$.由此推出 $by\in E(G)$,因而 $cy\notin E(G)$, $cx, cz\in E(G)$,此时 $\{a,c,y\}\subseteq N(x)$, x符合引理 6的要求.

引理 7 设 G为无三边形极小 3连通图, (T,F), $(T',F')\in\Gamma_f(G)$, F,F'都是 $E(G)$-断片,则 $F\cap F'\neq\emptyset\neq\overline{F}\cap\overline{F'}$或者 $F'\cap\overline{F}\neq\emptyset\neq F\cap\overline{F'}$.

证明 假若不然,由对称性可以假设 $F\cap F'=\emptyset=F\cap\overline{F'}$,由引理 6知 $|F\cap T'|=|F|\geqslant 3$,因为 $|T'|=3$,所以 $|F\cap T'|=3$, $T\cap T'=\emptyset=\overline{F}\cap T'$,由于 $\overline{F}\neq\emptyset$,所以 $F'\cap\overline{F}\neq\emptyset$或 $\overline{F}\cap\overline{F'}\neq\emptyset$,不妨设 $F'\cap\overline{F}\neq\emptyset$,由断片性质 1知 $|T\cap F'|\geqslant|F\cap T'|=3$,由此推出 $|T\cap F'|=3$, $\overline{F'}\cap T=\emptyset$, $\overline{F}\cap\overline{F'}=\emptyset$,因而 $\overline{F'}=\emptyset$,与引理 6矛盾.

引理 8 设 G为无三边形极小 3连通图, $(S,A)\in\Gamma_f(G)$, A是 $E(G)$-端片,则与 A中顶点关联的边都是非基本边.

证明 假若不然,设 $e=xy$是一条 G的基本边, $x\in A$,由于 G中无三边形,由引理 1,存在 $(T,F)\in\Gamma_f(G)$, $T\supseteq\{x,y\}$.由引理 7,不妨设 $A\cap F\neq\emptyset\neq\overline{A}\cap\overline{F}$.

令 $X_1=(S\cap F)\cup(S\cap T)\cup(A\cap T)$,

$X_2=(S\cap\overline{F})\cup(S\cap T)\cup(\overline{A}\cap T)$.

因为 $x\in A\cap T$,所以 $|A\cap F|<|A|$,而 A是 $E(G)$-端片, $\{x,y\}\subseteq X_1$,所以 $|X_1|\geqslant 4$, $|X_2|\leqslant 2$,从而 $\overline{A}\cap\overline{F}=\emptyset$,与假设矛盾,因此,与 A关联的边都是非基本边.

推论 2 设 G为无三边形极小 3连通图, $x\in V(G)$, $(S,A)\in\Gamma_f(G)$, A是 x-$E(G^*)$-端片,则连接 x与 A的边都是非基本边.

2 主要结论

定理 1 若 G为无三边形极小 3连通图,则 G中至少有 $|G|+3$条非基本边,并且 G中恰有 $|G|+3$条非基本边当且仅当 G同构于 $K_{3,3}$.

证明 由于 G中无三边形且是 3连通图,易知 $|G|\geqslant 6$.若 G的每一条边都是非基本边,则 G的非基本边数 $|E_n(G)|\geqslant\frac{3|G|}{2}$,而 $\frac{3|G|}{2}-(|G|+3)=\frac{|G|}{2}-3\geqslant 0$,所以 $|E_n(G)|\geqslant|G|+3$.若 G有基本边,设 A是一个 $E(G)$-端片, $S=N(A)$, B是含于 $\overline{A}$中的 $E(G)$-端片,由引理 5,引理 6和引理 8有

$$2|E_n(G)|=\sum_{v\in A}|E_n(v)|+\sum_{v\in B}|E_n(v)|+\sum_{v\notin A\cup B}|E_n(v)|\geqslant 3|A|+3|B|+2(|G|-|A|-|B|)=2|G|+|A|+|B|\geqslant 2|G|+6,$$

所以 $|E_n(G)|\geqslant|G|+3$.

如果 G同构于 $K_{3,3}$,易见 G中的每一条边都是非基本边,总共有 $9=|G|+3$条.

反之,如果 G中恰好有 $|G|+3$条非基本边.首先证明 G中每一条边都是非基本边.否则,如果 G中有一条边是基本边.由上述证明以知道 $|A|=|B|=3$, $A\cup B$中的每一顶点恰与 3条非基本边关联, $G-(A\cup B)$中的每一顶点恰与 2条非基本边关联.又因为 $|A|=3$,由引理 6知存在 $x\in N(A)$,使得 $|N(x)\cap A|\geqslant 2$.由于 $x\in N(A)\subseteq V(G)-(A\cup B)$,由此推出与 x关联的边中只有 2条非基本边,这 2条边恰好是连接 x与 A的那 2条边.取含于 $\overline{A}$中的 x-$E(G)$-端片 D,由推论 2知连接 x与 D的每条边都是非基本边,而 $N(x)\cap D\neq\emptyset$,因此与 x关联的边至少有 3条非基本边,矛盾.所以 G中每一条边都是非基本边, $|G|+3=|E_n(G)|=\frac{3|G|}{2}$, $|G|=6$,由此推出 G同构于 $K_{3,3}$.

参考文献:

[1] 潘玉美,莫明忠.极小 3连通图的非基本边数[J].广西科学, 2007, 14(1): 15-18, 21.

[2] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York: North-Holland, 1981.

[3] Mader W. Eine eigenschaff der atome endlicher graphen[J]. J Arch Math, 1971, 22: 333-336.

(责任编辑:尹 闯)