

## 单圈图的全图谱半径\*

## Spectral Radius of Total Graphs of Unicyclic Graphs

乔晓云<sup>1</sup>, 唐高华<sup>1</sup>, 郑学谦<sup>2</sup>

QIAO Xiao-yun, TANG Gao-hua, ZHENG Xue-qian

(1. 广西师范学院数学与计算机科学系, 广西南宁 530023; 2. 山西大学商务学院数学与应用数学系, 山西太原 030031)

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 2. Department of Mathematics and Applied Mathematics, Business College of Shanxi University, Taiyuan, Shanxi, 030031, China)

摘要: 利用移接变形的方法研究单圈图及其全图的谱半径, 给出这 2 类图的谱半径达到上下界的极图.

关键词: 图 单圈图 全图 谱半径 移接变形

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)03-0224-04

**Abstract** Using the method of graft transformation, this paper discussed the spectral radius of unicyclic graphs and their total graphs, meanwhile, the extreme graphs which reach the upper (lower) bounds were given respectively.**Key words** graph, unicyclic graphs, total graph, spectral radius, graft transformation

全图是八类变换图中的一类. 近年来, 不少学者陆续对八类变换图进行研究, 取得了一系列的成果. 比如: 文献 [1, 2] 刻画各类变换图的连通性和直径等性质. 文献 [3] 研究变换图的正则性, 谱半径并给出树的全图的谱半径上界. 文献 [4] 研究图的移接变形对它的谱半径大小影响. 之后很多针对谱半径及其上下界的研究都应用了文献 [4] 的结果. 本文通过移接变形的方法研究单圈图及其全图的谱半径, 给出这两类图的谱半径达到上下界的极图.

## 1 预备知识

本文研究的图都是简单连通无向图. 设图  $G$  的邻接矩阵为  $A = A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ , 称  $\det(\lambda I - A)$  为图  $G$  的特征多项式, 记为  $P(G)$  或  $P(G; \lambda)$ , 它的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  均为实数, 不妨将其由大到小排列为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 称  $\lambda_1(G)$  为图  $G$  的邻接谱半径, 记为

$d(G)$ . 当图  $G$  连通时,  $A(G)$  是一个非负不可约矩阵. 由文献 [5] 可知  $d(G)$  为单根, 并且存在一个单位正特征向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  与  $d(G)$  相对应, 即  $x_i > 0$ ,  $A(G)x = d(G)x$ , 其中  $x_i$  对应于顶点  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 称  $x$  为  $A(G)$  的 Perron 向量, 简称为  $G$  的 Perron 向量.

**定义 1.1** 单圈图是指边数等于顶点数的简单连通图. 记  $U_n$  为所有阶数为  $n (n \geq 3)$  的单圈图之集,  $S_n^3$  为星图  $K_{1, n-1}$  的两个一度点上加一条边所得到的图,  $C_n$  为  $n$  个顶点的圈.

**定义 1.2** 图  $G$  的全图  $T = T(G)$  (也记为  $G^{++}$ ) 构造如下:  $V(T(G)) = V(G) \cup E(G)$ ,  $E(T(G)) = E(G) \cup \{(u, e) | u \in V(G), e \in E(G), u \sim e\} \cup \{(e_1, e_2) | e_1, e_2 \in E(G), e_1 \sim e_2\}$ .

设  $U_n$  表示  $n$  个顶点的单圈图的集合,  $U \in U_n$  且  $n \geq 3$ . 令  $e = uv$  为单圈图  $U$  中的一条非悬挂边, 且  $e$  要么是割边, 要么属于  $C_n (n \geq 4)$ . 将  $U$  作变换:

(1) 收缩边  $e = uv$  (即将  $U$  中点  $u$  和点  $v$  合并为一点).

(2) 在合并后的点  $u(v)$  处增加一条悬挂边.

过程 (1) 和 (2) 叫做单圈图  $U$  的移接变形, 显然单圈图  $U$  经过移接变形后所得到的图仍为单圈图.

**引理 1.1**<sup>[4]</sup> 设  $u, v$  是  $n$  阶连通图  $G$  的 2 个顶

收稿日期: 2008-01-28

修回日期: 2008-05-26

作者简介: 乔晓云 (1982-), 女, 硕士研究生, 主要从事组合数学的研究工作.

\* 国家自然科学基金项目 (10771095); 广西科学基金项目 (0575052); 广西研究生创新计划项目 (2006106030701M05, 2007106030701M15); 广西教育厅科研基金项目资助.

点,  $v_1, v_2, \dots, v_s \in N_G(v) \setminus N_G(u)$ ,  $1 \leq s \leq d_v$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是图  $G$  的 Perron 向量, 这里分量  $x_i$  对应于顶点  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 而  $G^*$  是在图  $G$  中删去边  $(v, v_i)$  并添上边  $(u, v_i)$  ( $1 \leq i \leq s$ ) 所得到的图. 如果  $x_u \geq x_v$ , 那么  $d(G) < d(G^*)$ .

**命题 1.1** 对任意  $n$  阶连通单圈图  $U \in U_n$ , 有  $d(U) < d(U^1)$ , 其中  $U^1$  表示将  $U$  中的一条非悬挂边  $e$  经过一次移接变形所得到的单圈图.

**证明** (1) 当  $e$  为  $U$  中的一条非悬挂割边时, 令  $e = uv$ , 比较非悬挂割边  $e = uv$  的两个端点  $u$  和  $v$  相应的 Perron 分量  $x_u$  和  $x_v$ . 不妨设  $x_u \geq x_v$ , 显然  $N_U(v) - \{u\} \neq \emptyset$ . 设  $N_U(v) - \{u\} = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subseteq N_U(v) \setminus N_U(u)$ , 则将  $U$  中的边  $vv_i$  替换为  $uv_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ), 记变形后的图为  $U^*$ , 由引理 1.1 知  $d(U) < d(U^*)$ . 比较图  $U^*$  和图  $U^1$ , 容易知道图  $U^*$  与图  $U^1$  同构, 所以  $d(U) < d(U^1)$ .

(2) 当  $e \in C \subseteq U$  ( $|C| \geq 4$ ) 时, 同理可以证明结论成立, 所以命题成立.

**命题 1.2** 对于单圈图  $U \rightarrow U_0$  (图 1), 有  $d(U) < d(U_0)$ .

**证明** 比较点  $u_1$  和点  $u_2$  的相应的 Perron 分量  $x_{u_1}, x_{u_2}$ , 不妨设  $x_{u_1} \geq x_{u_2}$ , 显然  $N_U(u_2) \setminus N_U(u_1) \neq \emptyset$ . 设  $\{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2s}\} \subseteq N_U(u_2) \setminus N_U(u_1)$ , 将  $U$  中的边  $u_2u_{2i}$  替换为边  $u_1u_{2i}$  ( $1 \leq i \leq s$ ), 记变形后的图为  $U^1$ , 由引理 1.1 知  $d(U) < d(U^1)$ . 比较图  $U_0$  和图  $U^1$ , 容易知道图  $U_0$  与图  $U^1$  同构, 所以  $d(U) < d(U_0)$ .

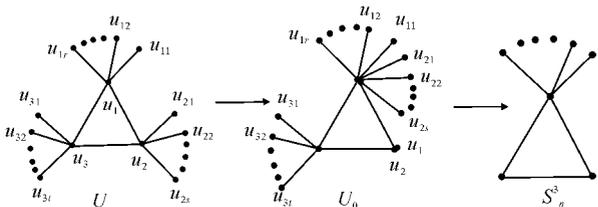


图 1  $U$  中边的替换

Fig. 1 Replace the border of  $U$

对于  $U_n$  中的任意单圈图  $U$ , 可以不断重复前述单圈图的移接变形过程以及命题 1.2 中的移接变形过程, 从而使其非悬挂边不断减少, 最终成为图  $S_n^3$ , 而在此过程中单圈图的谱半径不断严格递增.

**定理 1.1**<sup>[6]</sup> 对任意  $n$  阶连通单圈图  $U \in U_n$ , 有  $d(C_n) \leq d(U) \leq d(S_n^3)$ , 左边等式成立, 当且仅当  $U \cong C_n$ , 右边等式成立, 当且仅当  $U \cong S_n^3$ .

**引理 1.2**<sup>[7]</sup> 设  $G$  是一连通图,  $G'$  是  $G$  的真子图, 则  $d(G') < d(G)$ .

**引理 1.3**<sup>[11]</sup> 对于任意给定的图  $G$ , 则有图  $G^{+++}$  连通当且仅当  $G$  连通.

**引理 1.4**<sup>[3]</sup> 设  $n \geq 3$ , 则对  $T_n$  中的任意一棵树

$T$ , 必有  $d(T^{+++}) \leq d(K_{1, n-1}^{+++})$ , 且等式成立当且仅当  $T \cong K_{1, n-1}$ , 其中  $T_n$  表示阶数为  $n$  的树的集合.

## 2 全图的谱半径

**命题 2.1** 设  $U$  为  $U_n$  中的任意一个单圈图, 圈  $G$  ( $3 \leq |G| \leq n$ ) 为其子图, 且  $G$  上有  $t$  ( $0 \leq t \leq r$ ) 个顶点分别接有一棵树, 则必有  $d(U^{+++}) \leq d(U_3^{+++})$ , 其中单圈图  $U_3$  表示  $U$  经过移接变形把树子图变为星子图所得到的图, 并且等式成立, 当且仅当  $U \cong U_3$ .

**证明** 由引理 1.1 及引理 1.4 可以知道结论显然成立.

**命题 2.2** 对于单圈图  $U \rightarrow U_2$  (图 2), 则  $d(U_1^{+++}) \leq d(U_2^{+++})$ .

**证明** 先分别画出图 2 中移接变形前后单圈图  $U_1$  和  $U_2$  的全图  $U_1^{+++}$  和  $U_2^{+++}$  (图 3), 其中虚线圆中的所有顶点构成完全图 (为了清晰起见, 完全图中的边都没有画出, 其它图也都采用同样的画法).

由引理 1.3 知, 图  $U_1^{+++}$  连通. 设  $x$  是图  $U_1^{+++}$  的 Perron 向量, 其中与点  $u_1, u_2$  对应的分量分别为  $x_{u_1}, x_{u_2}$ , 不妨设  $x_{u_1} \geq x_{u_2}$ , 于是对于  $\{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2t}, u_3, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2r}, e_2\} \subseteq N_{U_1^{+++}}(u_2) \setminus N_{U_1^{+++}}(u_1)$ , 应用引理 1.1 将  $U_1^{+++}$  移接变形为图  $H$  (图 4), 其中点  $u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2t}, u_3, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2r}, e_2$  不再与点  $u_2$  相邻, 而与点  $u_1$  相邻, 则有  $d(U_1^{+++}) < d(H)$  (图 5).

比较图  $U_2^{+++}$  和图  $H$ , 易见图  $H$  添上边  $(e_{1i}, e_{2j}), (e_{1i}, e_2), (e_{1i}, e_{2j}), (e_2, e_{1i}), i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, t$  后即与图  $U_2^{+++}$  同构. 由此根据引理 1.2 可以知道  $d(H) < d(U_2^{+++})$ , 所以  $d(U_1^{+++}) < d(U_2^{+++})$ .

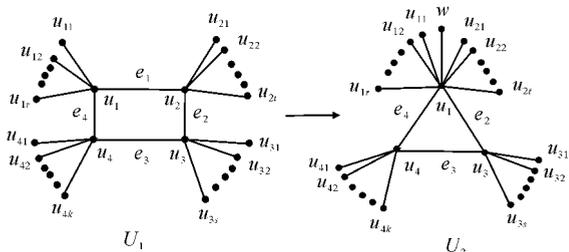


图 2  $U_1$  及其移接变形

Fig. 2  $U_1$  and its graft transformation

**命题 2.3** 对于单圈图  $U \rightarrow U_0$  (图 1), 则  $d(U^{+++}) \leq d(U_0^{+++})$  (如图 6).

**证明** 由引理 1.3 知, 图  $U^{+++}$  连通. 设  $x$  是图  $U^{+++}$  的 Perron 向量, 其中与点  $u_1, u_2$  对应的分量分别为  $x_{u_1}, x_{u_2}$ . 不妨设  $x_{u_1} \geq x_{u_2}$ , 于是对于  $\{u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2s}, e_{21}, e_{22}, e_{22}, \dots, e_{2s}\} \subseteq N_{U^{+++}}(u_2) \setminus N_{U^{+++}}(u_1)$ , 应用引理 1.1 将图  $U^{+++}$  移接变形为图  $H_1$  (图 7), 其中点  $u_{21}, u_{22}, u_{23}, \dots, u_{2s}, e_{21}, e_{22}, e_{22}, \dots, e_{2s}$ , 不再与点  $u_2$  相

邻,而与点  $u_1$  相邻,且有  $d(U^{+++}) < d(H_1)$ .

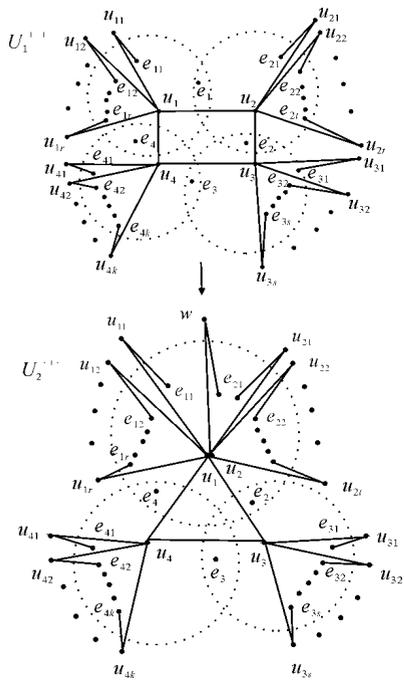


图 3  $U_1$  和  $U_2$  的全图  
Fig. 3 Total of  $U_1$  and  $U_2$

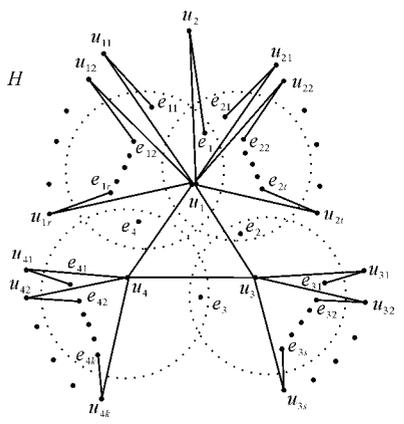


图 4  $U_1^{++}$  的移接变形  
Fig. 4 Graft transformation of  $U_1^{++}$

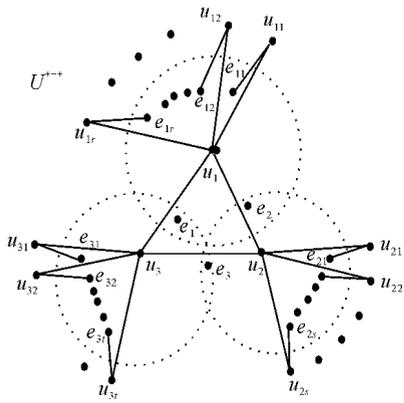


图 5  $U$  的全图  
Fig. 5 Total of  $U$

设  $x_1$  是图  $H_1$  的 Perron 向量,其中与点  $e_1, e_3$  相对应的分量分别为  $x_{e_1}, x_{e_3}$ ,显然  $x_{e_1} \geq x_{e_3}$ ,于是对于

$\{e_{21}, e_{22}, e_{23}, \dots, e_{2s}\} \subseteq N_{H_1}(e_3) \setminus N_{H_1}(e_1)$ ,继续应用引理 1.1,在图  $H_1$  中删去边  $(e_3, e_{2i})$ ,并添上边  $(e_1, e_{2i})$  ( $1 \leq i \leq s$ ),此时得到图  $H_2$ ,且有  $d(H_1) < d(H_2)$ .比较图  $H_2$  和  $U_0^{+++}$ ,容易知道图  $H_2$  添上边  $(e_{1i}, e_{2j}), i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$  后即与  $U_0^{+++}$  同构.由引理 1.2 知  $d(H_2) < d(U_0^{+++})$ ,所以  $d(U^{+++}) < d(U_0^{+++})$ .

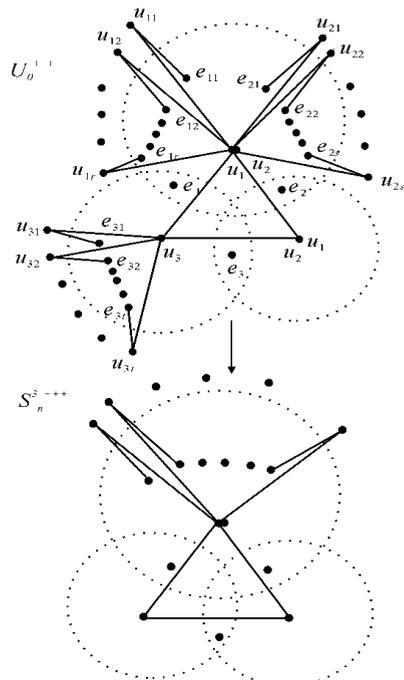


图 6  $U_0, S_3$  的全图  
Fig. 6 Total of  $U_0$  and  $S_3$

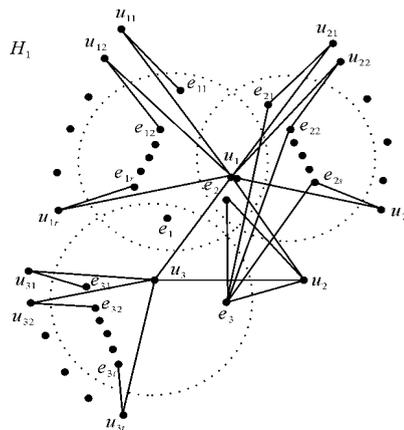


图 7  $U^{+++}$  的移接变形  
Fig. 7 Graft transformation of  $U^{+++}$

由任意  $n$  阶连通单圈图  $U$  到  $S_3^3$  的移接变形过程中,不仅单圈图  $U$  的谱半径不断严格递增,相应的单圈图  $U$  的全图  $U^{+++}$  的谱半径也不断严格递增.

定理 2.1 对任意一阶连通单圈图  $U \in U_n$ ,有  $d(C_n^{+++}) \leq d(U^{+++}) \leq d(S_n^{+++})$ ,且左边等式成立,当且仅当  $U \cong C_n$ ,右边等式成立,当且仅当  $U \cong S_3^3$ .

参考文献:

[1] Wu B, Meng J. Basic properties of total transformation graph [J]. Math Study, 2001, 34( 2): 109-116.

[2] Baoyindureng Wu, Li Zhang, Zhao Zhang. Note the transformation graph  $G^{xyz}$  when  $xyz = + + +$  [J]. Discrete Mathematics, 2005, 296 263-270

[3] 林祺. 关于变换图的若干性质 [D/OL]. [2007-03-10]. <http://dlib.cnki.net/kns50/index.aspx>.

[4] Wu B F, Xiao E L, Hong Y. The spectral radius of trees on  $k$  pendent vertices [J]. Linear Algebra Appl, 2005,

395 343-349.

[5] 柳柏濂. 组合矩阵论: 第 2 版 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[6] 洪渊. 单圈图谱的界 [J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 1986( 1): 31-34.

[7] Chang A, Huang Q X. Ordering trees by their largest eigenvalues [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 370: 175-184.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 223 页 Continue from page 223)

参考文献:

[1] Gould R J, Jacobson M S, Lehel J. Potentially  $G$ -graphic degree sequences [M]//Y Alavi. Combinatorics, Graph Theory and Algorithms Kalamazoo. Michigar New Issues Press, 1999: 387-400.

[2] Erdos P, Jacobson M S, Lehel J. Graphs realizing the same degree sequences and their respective clique numbers [M]//Y Alavi. Graph Theory, Combinatorics and Applications. New York: John Wiley Sons, 1991: 439-449.

[3] Li J S, Song Z X. An extremal problem on the potentially  $P_k$ -graphic sequence [J]. Discrete Math, 2000, 212: 223-231.

[4] Li J S, Song Z X. The smallest degree sum that yields potentially  $P_k$ -graphic sequences [J]. J Graph Theory, 1998, 29: 63-72.

[5] Li J S, Song Z X, Luo R. The Erdos-Jacobson-Lehel conjecture on potentially  $P_k$ -graphic sequences is true [J]. Science in China, 1998, 41: 510-520.

[6] 赖春晖. 蕴含  $C_k$  的度序列 [J]. 漳州师范学院学报: 自然科学版, 1997, 10(4): 27-31.

[7] Lai C H. The smallest degree sum that yields potentially  $C_k$ -graphical sequences [J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2004, 49: 57-64.

[8] Luo R. On potentially  $C_k$ -graphic sequences [J]. Ars Combinatoria, 2002, 64: 301-318.

[9] Luo R, Warner M. On potentially  $K_k$ -graphic sequences [J]. Ars Combinatoria, 2005, 75: 233-239.

[10] 赖春晖. 蕴含  $K_4 - e$  可图序列的刻划 [J]. 漳州师范学院学报: 自然科学版, 2002, 15( 3): 53-59.

[11] Eschen E M, Niu J B. On potentially  $K_4 - e$  graphic sequences [J]. Australasian J of Combinatorics, 2004, 29: 59-65.

[12] 徐正华, 胡黎莉. 蕴含  $K_{1,4} + e$  可图序列的刻划 [J]. 漳州师范学院学报: 自然科学版, 2007, 20( 1): 4-8.

[13] Kleitman D J, Wang D L. Algorithm for constructing graphs and digraphs with given valences and factors [J]. Discrete Math, 1973, 6: 79-88.

[14] Li J S, Yin J H. A variation of an extremal theorem due to woodall [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2001, 25: 427-434.

[15] Yin J H, Li J S. An extremal problem on potentially  $K_{r,s}$ -graphic sequences [J]. Discrete Math, 2003, 260: 295-305.

[16] Yin J H, Li J S. Two sufficient conditions for a graphic sequence to have a realization with prescribed cliquesize [J]. Discrete Math, 2005, 301: 218-227.

(责任编辑: 尹 闯)