DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.03.008
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(3): 209~ 210, 215

2个经典 Ramsey数的新下界*

Two New Lower Bounds for Classical Ramsey Numbers

陈 红[1],罗海鹏[2]
CHEN Hong[1], LUO Hai-peng[2]

(1.梧州学院,广西梧州 543002; 2.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 2. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 利用一般循环图计算 Ramsey数下界,构造 2个循环图,得到 2个经典 Ramsey数 $R(3,t)$的新下界: $R(3,30)\geqslant 188$, $R(3,41)\geqslant 272$.

关键词: 循环图 Ramsey数 下界
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)03-0209-02

Abstract By constructing two circulant graphs and computing, obtained new lower bounds for two classical Ramsey numbers: $R(3,30)\geqslant 188$, $R(3,41)\geqslant 272$.

Key words circulant graph, Ramsey number, lower bound

对于任意正整数 s和 t,经典 Ramsey数 $R(s,t)$是具有下述性质的最小正整数 n: 每个 n阶简单图,或者包含一个有 s个顶点的团,或者包含一个有 t个顶点的独立集. 确定 Ramsey数是组合数学中非常困难的问题[1],动态综述文献 [2]记录了迄今已知的一些经典 Ramsey数的准确值和上下界.

用循环图研究经典 Ramsey数的下界的主要困难,是在寻找有效的参数集来构造图和计算图的团数这两个方面都会遇到巨大的运算量.文献 [3~ 9]利用素数阶循环图研究经典 Ramsey数的下界,能够充分运用有限域的性质提高运算效率,因而得到的一些下界被文献 [2]的各种版本所引用.

本文借鉴素数阶循环图的某些经验,构造 2个一般阶循环图,得到经典 Ramsey数 $R(3,t)$的 2个新下界: $R(3,30)\geqslant 188$, $R(3,41)\geqslant 272$,其中 $R(3,30)\geqslant 188$,改进了文献 [2]记录的迄今已知的最好下界 $R(3,30)\geqslant 187$.

1 若干引理

约定,对于整数 $s<t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$. 给定整数 $n\geqslant 5$,记 Z_n 为模 n的最小非负剩余系,即 $Z_n=[0,n-1]$.以下除非特别说明,所有模 n整数的运算结果都理解为模 n后属于 Z_n,并用通常的等号“=”表示“模 n相等”.

定义 1 令 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$.对于集合 $S=[1,m]$的一个 2部分拆 $S=S_1\cup S_2$(S_1与 S_2均非空集),记 $A_i=\{x \mid x\in Z_n, x\in S_i \text{或 } n-x\in S_i\}$,设 n阶完全图 K_n的顶点集 $V=Z_n$,边集 E是 Z_n的所有 2元子集的集且有分拆 $E=E_1\cup E_2$,其中

$E_i=\{\{x,y\}\mid \{x,y\}\in E \text{且 } x-y\in A_i\}, i=1,2.$

把 E_i中的边叫做 A_i色的,记 K_n中 A_i色边所导出的子图为 $G_n(A_i)$,其团数记为 $[G_n(A_i)]$,这里 $i=1,2$. 于是按照参数集合 S_1与 S_2把 K_n的边 2染色,得到 n阶循环图 $G_n(A_i)$.根据 Ramsey定理,显然有

引理 1 设 $k_i=[G_n(A_i)], i=1,2$, 则 $R(k_1+1,k_2+1)\geqslant n+1$.

引理 2 设 $b\in Z_n$或 $b=n$,则 Z_n到自身的变换 $f: x\mapsto -x+b$是 $G_n(A_i)$的同构变换.

证明 显然 f是顶点集 V的 1-1变换. 对于任意 $x,y\in V=Z_n$, 注意到 $f(y)-f(x)=x-y$,即 $\{x,y\}\in A_i\Leftrightarrow\{f(y),f(x)\}\in A_i$. 因此 f把 S_i色边变换成 S_i色边.

对于任意 $i\in\{1,2\}$,考察 $G_n(A_i)$的团和团数. 由引理 2易知, $G_n(A_i)$的团数等于其中含顶点 0的团的最大阶,因此我们只须考察 $G_n(A_i)$中含顶点 0的团. 根据定义 1知这样的团的其他非零顶点是集合

收稿日期: 2008-06-03
作者简介: 陈 红(1962-),女,副教授,主要从事组合数学的研究工作。
* 国家自然科学基金项目(60563008),梧州学院科研项目(2007B007)资助

A_i的元. 故有

引理 **3** 在图 $G_n(A_i)$中顶点集为 A_i 的导出子图记为 $G_n[A_i]$, $G_n[A_i]$的团数为 $[A_i]$, 则有 $[G_n(A_i)] = [A_i] + 1$.

于是求 $G_n(A_i)$的团数就转化为求 $G_n[A_i]$的团数,那么有

引理 **4** 设 $x \in S_i$, 记 $d_i(x) = |\{y | y \in A_i$ 且 $x - y \in A_i\}|$,如果对于任意 $x \in S_i$,都有 $d_i(x) = 0$,那么 $[A_i] = 1$.

证明 否则,设对于任意 $x \in S_i$,都有 $d_i(x) = 0$,且有 $[A_i] \geqslant 2$, 则 $[G_n(A_i)] \geqslant 3$,在图 $G_n(A_i)$中有 3阶团$\{0, x, y\}$,其中 $x - y \in A_i$. 有如下情形:

如果 x 或 $y \in S_i$,就有 $d_i(x) \geqslant 1$或 $d_i(y) \geqslant 1$,与已知条件矛盾.

如果 $n - x$ 与 $n - y \in S_i$, 则由引理 2知$\{0, n - x, n - y\}$也是图 $G_n(A_i)$的 3阶团,就有 $d_i(n - x) \geqslant 1$, 与已知条件 $d_i(x) = 0$矛盾. 引理 4证明完毕.

当 $[A_i] \geqslant 2$时,可用回溯法计算 $[A_i]$. 把 A_i 的元按字典排列法排序, 作成一个全序集 $(A_i, <)$. 设 $G_n[A_i]$的 k阶团中最小的元为 x_j,称这个团为以 x_j 作起点长度为 $k - 1$的 A_i 色的链,并记 $l_i(x_j) = k - 1$.

设 $k = [A_i]$, $\{x_1, x_2, \cdots\}$是 $G_n[A_i]$中的一个 k阶团, 根据引理 2知 $\{n - x_1, n - x_2, \cdots\}$也是 $G_n[A_i]$中的一个 k阶团. 注意到 $x_j \in S_i$ 与 $n - x_j \in S_i$ 至少有一个成立 (当 n 是偶数且 $x_j = m$ 时两者同时成立),所以有

引理 **5** 存在 $x_j \in S_i$,使 $l_i(x_j) = [A_i] - 1$.

一般地说, $\forall x \in S_i$,有 $l_i(x) \leqslant [A_i] - 1$. 但是引理 5表明,为了计算 $G_n[A_i]$的最大团,只需计算以 $x \in S_i$ 作起点的最长的 A_i 色的链. 这样能够提高运算效率. 根据上述理论,有

算法 **1**(用一般阶循环图计算 Ramsey数下界的计算方法).

1° 给定整数 $n \geqslant 5$,记 $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. 给定集合 $S = [1, m]$的一个 2部分拆 $S = S_1 \cup S_2$ (S_1 与 S_2 均非空集). 设 $q_i = |S_i|$,令 $i = 1$.

2° 作集合 $A_i = \{x | x \in Z_n, x \in S_i$ 或 $n - x \in S_i\}$,并把 A_i 的元按字典排列法排序. 设 $A_i = \{x_1, x_2, \cdots\}$. 令 $[A_i] = 1$, $j = 1$.

3° 对于 $x_j \in S_i$,计算

$d_i(x_j) = |\{y | y \in A_i, y > x_j$ 且 $y - x_j \in A_i\}|$.

如果 $d_i(x_j) = 0$,转到 5°.

4° 计算以 $x_j \in S_i$ 为起点的 A_i 色的链. 如果 $l_i(x) \geqslant [A_i]$,令 $[A_i] = l_i(x_j) + 1$,并打印这条 A_i 色的链.

5° 令 $j = j + 1$,如果 $j < q_i$,转到 3°.

6° 令 $k_i = [A_i] + 1$, $i = i + 1$. 如果 $i = 2$,转到 2°.

7° 打印 $R(k_1 + 1, k_2 + 1) \geqslant n + 1$,运算结束.

在算法 1中, 3°~ 5°是用回溯法计算最长的 A_i 色的链. 在 3°中,当 $d_i(x_j) = 0$时,由于前面已设定 $[A_i] = 1$,就不必计算以 x_j 为起点的 A_i 色的链,可转到 5°. 当 $d_i(x_j) > 0$时,在 4°中打印出来的,都是比前面已知的链更长的链. 最后打印出来的,就是在 $G_n[A_2]$中按字典排列法排序在最前面的第一条长度为 $l_i(x_j) = [A_i] - 1$的 A_i 色的链,相应于 $G_n[A_i]$中的第一个阶数为 $[A_i]$的团.

例 给定整数 $n = 45$,参数集为 $S_1 = \{1, 3, 5, 12, 19\}$.

根据算法 1,得到 $[A_1] = 1$, $[A_2] = 9$, $R(3, 11) \geqslant 46$,其中第一条长度为 8的 A_2 色的链是 $2 \prec 4 \prec 6 \prec 8 \prec 10 \prec 17 \prec 24 \prec 31 \prec 38$.

由文献 [2]可知 $R(3, 11) \geqslant 46$是迄今已知的最好下界.

2 主要结果

定理 **1** $R(3, 30) \geqslant 188$, $R(3, 41) \geqslant 272$.

证明 (1)给定整数 $n = 187$,参数集

$S_1 = \{1, 4, 18, 20, 30, 35, 43, 58, 67, 69, 74, 80, 82, 91\}$,

根据算法 1,得到 $[A_1] = 1$, $[A_2] = 28$, $R(3, 30) \geqslant 188$,其中第一条长度为 27的 A_2色的链是

$2 \prec 5 \prec 7 \prec 10 \prec 13 \prec 24 \prec 26 \prec 36 \prec 38 \prec 47 \prec 49 \prec 64 \prec 75 \prec 78 \prec 86 \prec 88 \prec 97 \prec 102 \prec 111 \prec 119 \prec 124 \prec 135 \prec 148 \prec 150 \prec 161 \prec 163 \prec 173 \prec 175$.

(2)给定整数 $n = 271$,参数集

$S_1 = \{1, 3, 5, 14, 16, 20, 26, 33, 48, 55, 67, 73, 77, 79, 85, 92, 98, 104, 116, 126\}$,

根据算法 1,得到 $[A_1] = 1$, $[A_2] = 39$, $R(3, 41) \geqslant 272$,其中第一条长度为 38的 A_2色的链是

$2 \prec 4 \prec 6 \prec 8 \prec 10 \prec 19 \prec 21 \prec 25 \prec 31 \prec 38 \prec 53 \prec 60 \prec 72 \prec 78 \prec 82 \prec 84 \prec 90 \prec 97 \prec 103 \prec 109 \prec 121 \prec 131 \prec 150 \prec 160 \prec 172 \prec 178 \prec 184 \prec 191 \prec 197 \prec 199 \prec 203 \prec 209 \prec 221 \prec 228 \prec 243 \prec 250 \prec 256 \prec 260 \prec 262$.

这就证明了定理 1的结论.

在 CPU为 AMD4200+ 的计算机上完成算法 1所需要的计算机时间约为 35h.

(下转第 215页 Continue on page 215)

$$F_v(2k+1, 2k+1; 2k+2) \leqslant c_0(2k)^{\frac{1}{4}\log_2(2k)+1}.$$

We have proved $F_v(k, k; k+1) \leqslant c_0(k-1)^{\frac{1}{4}\log_2(k-1)-r}$ for $2a_0 \leqslant k \leqslant 4a_0$. We can prove the inequality for any $k \geqslant a_0$ by induction similarly.

From all above we complete the proof.

We may give theorem 7 a simple form as following.

Theorem 8 For any r satisfies $0 < r < \frac{1}{2}\log_2 3 - \frac{3}{4}$, there are $N(r) > 0$ and $c(r) > 0$ such that

$$F_v(k, k; k+1) \leqslant c(r)(k-1)^{\frac{1}{4}\log_2(k-1)-r}.$$

for any $k \geqslant N(r)$, in which both $N(r)$ and $c(r)$ are constants only depending on r.

Remark Theorem 5 in this paper was also proven in reference[9] independently.

An earlier version of this paper was submitted to Journal of Graph Theory in Dec 2006, and was rejected at Feb 2008, mainly for the results in reference[10] gotten by non-constructive methods are much better than theorem 8 in this paper. Thanks to the referees who gave many advices on improving the writing of that version. Even so, we submit this paper here after some necessary changes, mainly for our methods are constructive. The inequalities proven in this paper can be used to give upper bounds for vertex Folkman numbers, in particular, those small ones.

References

[1] Folkman J. Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring [J]. SIAM J Appl Math, 1970(18): 19-24.

[2] Ňešetřil J and Rödl V. The Ramsey property for graphs with Forbidden complete subgraphs [J]. J Combin Theory Ser B, 1976(20): 243-249.

[3] Graham R L, Rothschild B L, Spencer J H. Ramsey theory [M]. New York: Wiley, 1980.

[4] Nenov N. Application of the corona-product of two graphs in Ramsey theory [J]. Annuaire Univ Sofia Fac Math Inform, 1985, 79: 349-355.

[5] Luczak T, Ruciński A, Urbański S. On minimal Folkman graphs [J]. Discrete Math, 2001, 236: 245-262.

[6] Nenov N. Extremal problems of graph colorings [M]. Sofia: Dr Sci Thesis, Sofia Univ, 2005.

[7] Xu Xiaodong, Luo Haipeng, Su Wenlong, et al. New inequalities on vertex Folkman numbers [J]. Guangxi Sciences, 2006, 13(4): 249-252.

[8] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory and applications [M]. London: Macmillan, 1976.

[9] Kolev N. A multiplicative inequality for vertex Folkman numbers [J]. Discrete Mathematics, article in press, 2008, 308(8): 4263-4266.

[10] Dudek A and Rödl V. New upper bound on vertex Folkman numbers [J]. To Appear in Lecture Notes in Computer Science 4957, 2008: 473-478.

(责任编辑: 尹　闯)

(上接第 210页 Continue from page 210)

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Radziszowski S P. Small Ramsey numbers [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2004, DS1O: 1-48.

[3] 苏文龙, 罗海鹏, 李乔. 多色经典 Ramsey数 $R(q, q, \ldots, q)$ 的下界 [J]. 中国科学: A辑, 1999, 29(5): 408-413.

[4] 苏文龙, 罗海鹏, 李乔. 经典 Ramsey 数 $R(4, 12)$, $R(5, 11)$ 和 $R(5, 12)$ 的新下界 [J]. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.

[5] 罗海鹏, 苏文龙, 李乔. 经典 Ramsey数 $R(6, 12)$, $R(6, 14)$ 和 $R(6, 15)$ 的新下界 [J]. 科学通报, 1998, 43(12): 1336-1337.

[6] Su Wenlong, Luo Haipeng, Shen Yunqiu. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5, 13)$ and $R(5, 14)$ [J]. Applied Mathematics Letters, 1999(12): 121-122.

[7] Luo Haipeng, Su Wenlong, Shen Yunqiu. New lower bounds of ten classical Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2001(24): 81-90.

[8] Luo Haipeng, Su Wenlong, Li Zhengchong. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2002, 25: 103-116.

[9] Luo Haipeng, Su Wenlong, Shen Yunqiu. New lower bounds for two multicolor classical Ramsey numbers [J]. Radovl Matematickl, 2004, 13: 15-21.

(责任编辑: 尹　闯)