DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.008
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 123~124

关于 Lucas三角形猜想*

A Proof of Lucas Triangles Conjecture

林丽娟
LIN Li-juan

(重庆师范大学数学与计算机科学学院,重庆 400047)
(College of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University, Chongqing, 400047, China)

摘要: 在 Heron三角形边长为 Lucas数的情况下,应用同余法,证明不存在边长为 L_{n-k}, L_n, L_n ($1 \leqslant k < n$) 的 Heron三角形.

关键词: Lucas三角形 Fibonacci数 Lucas数
中图法分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0123-02

Abstract Lucas triangles do not exist with $1 \leqslant k < n$ has been proved by using congruence, when the side of Heron triangle are lucas numbers.

Key words Lucas triangle, Fibonacci numbers, Lucas numbers

由 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geqslant 0)$ 和 $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n (n \geqslant 0)$ 所定义的递归数列分别称为 Fibonacci数列和 Lucas数列, F_i 和 L_i 分别称为 Fibonacci数和 Lucas数. Fibonacci数列和 Lucas数列的性质一直是数论中重要的研究内容之一. 1990年, H. Harborth和 A. Kemnitz[1]在研究有理数距离的构形时提出 Fibonacci三角形猜想,与之平行的还有 Heron三角形猜想,即

猜想 当 $1 \leqslant k < n$ 时,不存在边长为 L_{n-k}, L_n, L_n 的 Heron三角形.

杨仕椿[2]证明 $k = 1, 2, 3$ 时猜想成立. 吴文权等[3]通过二元四次丢番图方程证明 $k = 5$ 或偶数时猜想成立. 本文在 Heron三角形边长为 Lucas数的情况下,用同余法证明当 $1 \leqslant k < n$ 时猜想成立.

1 相关定义及引理

定义 1 边长为整数且面积也为整数的三角形称为 Heron三角形,边长为 Lucas数的 Heron三角形称为 Lucas三角形.

引理 1 如果边长为 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 的三角形是一个 Lucas三角形,则 L_n 是偶数.

证明 设此三角形的面积为 S,则 $S = \frac{1}{2}L_n\sqrt{L_{n+k}^2 - L_n^2/4}$,于是有

$$16S^2 = 4L_n^2L_{n+k}^2 - L_n^4. \tag{1}$$

在(1)式两边取模 4,知 $L_n^4 \equiv 0 \pmod 4$,所以 L_n 是偶数.

引理 2 L_n 是偶数当且仅当 $n \equiv 0 \pmod 3$.

证明 对 Lucas数列 $\{L_n\}$ 取模 2,得到剩余类周期为 3的剩余类序列: 1, 1, 0, 1, 1, 0,…… 所以 $L_n \equiv 0 \pmod 2$ 当且仅当 $n \equiv 0 \pmod 3$.

引理 3 如果边长为 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 的三角形是一个 Lucas三角形,则 $d = (L_n, L_{n+k}) = (L_{n+k}, \frac{1}{2}L_n)$.

证明 设此三角形的面积为 $S, d = (L_n, L_{n+k})$,则

$$16S^2 = 4L_n^2L_{n+k}^2 - L_n^4 = d^2L_n^2\left(4\frac{L_{n+k}^2}{d^2} - \frac{L_n^2}{d^2}\right). \tag{2}$$

由(2)式知 $4\frac{L_{n+k}^2}{d^2} - \frac{L_n^2}{d^2}$ 为一个平方数,于是 $4\frac{L_{n+k}^2}{d^2} - \frac{L_n^2}{d^2} \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$. 又由于 $4\frac{L_{n+k}^2}{d^2} \equiv 0 \pmod 4$,则 $\frac{L_n^2}{d^2} \equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$,而 $\frac{L_n^2}{d^2}$ 也是一个平方数,故 $\frac{L_n^2}{d^2} \equiv 0 \pmod 4$,于是 $\frac{L_n}{d} \equiv 0 \pmod 2$,则 $d \mid \frac{L_n}{2}$,于是 $d = (L_n, L_{n+k}) \mid (L_{n+k}, \frac{1}{2}L_n)$. 而显然有 $(L_{n+k}, \frac{1}{2}L_n) \mid (L_{n+k}, L_n)$,故 $d = (L_n, L_{n+k}) = (L_{n+k}, \frac{1}{2}L_n)$.

引理 4 如果边长为 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 的三角形是

收稿日期: 2007-11-12
作者简介: 林丽娟(1981-),女,硕士研究生,主要从事数论及其应用研究工作。
* 重庆市教委科研基金项目(KJ050807)资助。

一个 Lucas三角形，则$\frac{L_{n+k}}{d}\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，其中 $d=(L_n, L_{n+k})$.

证明　由引理 3知，$d=(L_n, L_{n+k})=(L_{n+k}, \frac{1}{2}L_n)$. 设此三角形底边上的高为 h，则 $h^2=L_{n+k}^2-\frac{1}{4}L_n^2$，变形得 $\frac{h^2}{d^2}=\frac{L_{n+k}^2}{d^2}-\frac{L_n^2}{4d^2}$ 即 $(\frac{h}{d})^2+(\frac{L_n}{2d})^2=(\frac{L_{n+k}}{d})^2$，$(\frac{h}{d}, \frac{L_n}{2d}, \frac{L_{n+k}}{d})$ 为本原商高数，于是 $\frac{L_{n+k}}{d}\equiv 1(\mathrm{mod}4)$.

引理 5　如果边长为 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 的三角形是一个 Lucas三角形，则$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}, \frac{L_{n+k}}{d}-\frac{L_n}{2d}$都是平方数，其中 $d=(\frac{1}{2}L_n, L_{n+k})$.

证明　由引理 4知$\frac{h^2}{d^2}=\frac{L_{n+k}^2}{d^2}-\frac{L_n^2}{4d^2}=(\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d})(\frac{L_{n+k}}{d}-\frac{L_n}{2d})$，而$\frac{h^2}{d^2}$是一个平方数，并且$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}$和$\frac{L_{n+k}}{d}-\frac{L_n}{2d}$互素，故$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}, \frac{L_{n+k}}{d}-\frac{L_n}{2d}$都是平方数.

2　主要结论

定理 1　不存在边长为 $L_{n-k}, L_n, L_n\ (1\leqslant k<n)$ 的 Lucas三角形.

证明　假设存在以 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 为边长的 Lucas三角形. 由引理 4知$\frac{L_{n+k}}{d}\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，则$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}\equiv 1+\frac{L_n}{2d}(\mathrm{mod}4)$，$\frac{L_{n+k}}{d}-\frac{L_n}{2d}\equiv 1-\frac{L_n}{2d}(\mathrm{mod}4)$. 若$\frac{L_n}{2d}\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，则$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$，由引理 5知这不可能成立；若$\frac{L_n}{2d}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$，则$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}\equiv 3(\mathrm{mod}4)$，由引理 5知这也不可能成立；若$\frac{L_n}{2d}\equiv 3(\mathrm{mod}4)$，则$\frac{L_{n+k}}{d}+\frac{L_n}{2d}\equiv 2(\mathrm{mod}4)$，同样由引理 5知这不可能成立. 故$\frac{L_n}{2d}\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，于是 $8\mid L_n$.

对 Lucas数列$\{L_n\}$取模 8，得到剩余类周期为 12 的剩余类序列：1, 3, 4, 7, 3, 2, 5, 7, 4, 3, 7, 2,…… 所以 $L_n\neq 0(\mathrm{mod}8)$，这与 $8\mid L_n$ 矛盾. 故假设不成立，即不存在以 L_n, L_{n+k}, L_{n+k} 为边长的 Lucas三角形.

参考文献：

[1] Harborth H, Kemnitz A. Fibonacci triangles, applications of fibonacci number [J]. Kluwer Acad Publ Dordercht, 1990, 3: 129-132.

[2] 杨仕椿. 关于 Fibonacci三角形和 Lucas三角形的一些结论 [J]. 广西民族学院学报：自然科学版，2002, 8(4): 1-3.

[3] 吴文权，何波. 关于 Lucas三角形猜想 [J]. 阿坝师范高等专科学校学报，2006, 23(3): 114-115.

(责任编辑：尹　闯)

(上接第 118页　Continue from page 118)

$\langle f(z), T_h g(z)\rangle=\langle f(z), h(z)g(z)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}_n(\sum_{k=0}^{n}\overline{\hat{g}_k}\overline{\hat{h}_{n-k}})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_n\overline{\hat{g}_k}\overline{\hat{h}_{n-k}}=$

$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\hat{g}_k}\sum_{n=k}^{\infty}\hat{f}_n\overline{\hat{h}_{n-k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\hat{g}_n}\sum_{k=n}^{\infty}\hat{f}_k\overline{\hat{h}_{k-n}}$,

比较得 $a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\hat{f}_k\overline{\hat{h}_{k-n}}$.

若 $h(z)=cz+d$, $e(z)=\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}$, $g(z)=\frac{1}{-\bar{b}z+\bar{d}}$，则 $a_n=\hat{f}_n\bar{d}+\hat{f}_{n+1}\bar{c}$,

$T_gC_eT_h^*f=T_gC_e[\sum_{n=0}^{\infty}(\hat{f}_n\bar{d}+\hat{f}_{n+1}\bar{c})z^n]=$

$\frac{1}{-\bar{b}z+\bar{d}}\sum_{n=0}^{\infty}(\hat{f}_n\bar{d}+\hat{f}_{n+1}\bar{c})[\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}]^n=$

$\frac{\hat{f}_0\bar{d}}{-\bar{b}z+\bar{d}}+\frac{1}{-\bar{b}z+\bar{d}}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}_n\{\bar{d}[\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}]^n+$

$\bar{c}[\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}]^{n-1}\}=\frac{\hat{f}_0\bar{d}}{-\bar{b}z+\bar{d}}+\frac{1}{-\bar{b}z+\bar{d}}\cdot$

$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{f}_n\frac{z(-\bar{c}\bar{b}+\bar{a}\bar{d})}{\bar{d}-\bar{b}z}[\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}]^{n-1}$.

比较可以得出推论 2. 1成立.

参考文献：

[1] Cowen C C. Composition operators on Hilbert spaces of analytic function: A status report [J]. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1990, 51: 1, 131-145.

[2] Cowen C C, Maccluer B D. Some problems on composition operators [J]. Contemporary Mathematics, 1998, 213: 17-25.

[3] Cowen C C. Linear fractional composition operators on H^2 [J]. J Integral Equations and Operator Theory, 1988, 11: 151-160.

[4] Cowen C C, Maccluer B D. Linear fractional maps of the ball and their composition operators [J]. Acta Sci Math, 2000, 66: 351-376.

[5] Donald J N M. Adjoints of a class of composition operators [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003, 131: 601-606.

[6] Littlewood J E. On inequalities in the theory of functions [J]. Proc London Math Soc, 1925, 23: 481-519.

(责任编辑：尹　闯)