DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.006
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 27~ 29

# 一类无约束 0-1二次规划的一种新解法*

# A New Method for Unconstraint Quadratic Zero-one Programming

雍龙泉
YONG Long-quan

(陕西理工学院数学系,陕西汉中 723001)
(Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong, Shaanxi, 723001, China)

摘要:以矩阵为基础,给出当目标函数中的矩阵满足一定性质时,快速获得 0-1二次规划最优解的一种新解法,并用实例说明解法的有效性和实用性.该解法在很大程度上丰富了 0-1二次规化的数值实验.

关键词:线性规划 0-1二次规划 矩阵 最优解
中图法分类号:O221.2 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)01-0027-03

**Abstract** According to matrix theory, a new method for unconstraint quadratic zero-one programming whose matrix possess some characteristic in objective function is proposed. The algorithm is an efficient method because of its good practicability.

**Key words** linear programming, zero-one quadratic programming, matrix, optimal solution

非线性整数规划在经济学、计算机科学及工程技术中都有非常重要的应用.非线性整数规划是数学规划和运筹学中最困难的研究领域之一.即使是形式上看起来很简单的线性约束二次整数规划问题在全空间上求解也是不可判定的,即不存在求解该问题的算法.因此,在求解非线性整数规划问题时,往往要假定在有界闭箱上进行. 0-1二次规划是一类特殊的非线性整数规划, Barhona F[1], Hansen. P[2], Gulati V. P[3]和 Panos M. P[4]对 0-1二次规划做了大量的研究,并且给出了一些具体的实例;陈伟和张连生[5]对 0-1二次规划也做了一些研究,得到了一些比较好的结果.总体上讲,求解非线性整数规划问题的方法到目前为止还不多,现有的算法大致可分为三类: (1)化为等价问题.该算法主要包含化为连续优化问题的方法和线性化为线性整数规划问题的方法. (2)分支定界法.对目标函数和约束函数是可定界的非线性整数规划问题,这种方法是适用的. (3)近似方法.是尽快找到问题的好的解法,但是未必是最优解而设计的方法,它主要包括随机方法和局部搜索方法.本文主要研究一类无约束的 0-1二次规划,以矩阵为基础,给出当目标函数矩阵满足一定性质时,快速地获得 0-1二次规划最优解的一个新方法,并用实例说明该方法具有较强的实用性.

## 1 主要引理

引理 设 $Q$是 $n$阶实对称矩阵,考虑二次规划(QP)和线性规划(LP):

$$(QP)\begin{cases}\min f(x)=c^{T}x+\dfrac{1}{2}x^{T}Qx,\\ \text{s.t. } 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

$$(LP)\begin{cases}\min(\nabla f(x^{*}))^{T}x,\\ s.t.\ 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

若 $x^{*}$ 是(QP)的全局最优解,则 $x^{*}$ 也是线性规划(LP)的最优解.

证明 显然,二次规划(QP)和线性规划(LP)的可行域相同,若记可行域为 $S=\{x|\ 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$,易证 $S$为凸集.因此对 $\forall y\in S,\lambda\in(0,1)$,由 $x^{*}\in S$,则 $z=\lambda y+(1-\lambda)x^{*}\in S$,即 $z=x^{*}+\lambda(y-x^{*})\in S$.由于 $x^{*}$ 是(QP)的全局最优解,则有 $f(z)\geqslant f(x^{*})$,代入整理得

收稿日期:2007-06-15
修回日期:2007-08-24
作者简介:雍龙泉(1980-),男,讲师,主要从事最优化算法的教学与研究工作。

* 陕西理工学院科研基金项目(SLGQD0517)资助。

$\lambda(c+Qx^*)^T(y-x^*)+\frac{1}{2}\lambda^2(y-x^*)^TQ(y-x^*)\geqslant 0$.

又由于 $\lambda\neq 0$,两边同除以 $\lambda$ 有

$$(c+Qx^*)^T(y-x^*)\geqslant -\frac{1}{2}\lambda(y-x^*)^TQ(y-x^*). \quad (1)$$

(1) 式表明对所有的 $\lambda\in(0,1)$ 都成立.若令 $\lambda\to 0^+$,则有

$$(c+Qx^*)^T(y-x^*)\geqslant 0. \quad (2)$$

利用 (2) 式,对 $\forall y\in S$ 都有 $(\nabla f(x^*))^Ty\geqslant(\nabla f(x^*))^Tx^*$ 成立,这说明 $x^*$ 是线性规划 (LP) 的最优解.

推论　考虑二次规划 (QP),若 $m_i\leqslant\frac{\partial f}{\partial x_i}\leqslant M_i$,$\forall x\in[0,1]^n$,$i=1,2,\cdots,n$.则当 $m_i>0$ 时,$x_i^*=0$;当 $M_i<0$ 时,$x_i^*=1$.

显然,推论对于离散的情形,即 $x\in\{0,1\}^n$ 时也成立.

## 2　主要结论

考虑 0-1 二次规划 (QP1),其中 $Q$ 是 $n$ 阶实对称矩阵,记 $q_{ij}$ 为矩阵 $Q$ 的元素,$Q_0=Q-\mathrm{diag}(q_{11},q_{22},\cdots,q_{nn})$,由于 $x\in\{0,1\}^n$,则有 $x_i^2=x_i$,$i=1,2,\cdots,n$,因此 (QP1) 可以写成等价形式 (QP2).即

$$(\mathrm{QP1})\begin{cases}\min f(x)=c^Tx+\frac{1}{2}x^TQx,\\ \mathrm{s.t.}\ x\in\{0,1\}^n,\end{cases}$$

$$(\mathrm{QP2})\begin{cases}\min f(x)=c^Tx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n q_{ii}x_i+\frac{1}{2}x^TQ_0x,\\ \mathrm{s.t.}\ x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

令 $\bar{Q}=Q_0+\mathrm{diag}(c_1+\frac{1}{2}q_{11},c_2+\frac{1}{2}q_{22},\cdots,c_n+\frac{1}{2}q_{nn})$,$\bar{Q}=(\bar{q}_{ij})_{n\times n}$.

定理　记 (QP2) 的最优解为 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$,如果 $\bar{Q}$ 为严格对角占优矩阵[6],则

$$\bar{x}_i=\begin{cases}1,\text{当}\ \bar{q}_{ii}<0\\ 0,\text{当}\ \bar{q}_{ii}>0\end{cases}(i=1,2,\cdots,n).$$

证明　由于 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=c_i+\frac{1}{2}q_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}x_j$,记 $q_{ij}^+$,$q_{ij}^-$ 分别表示 $(q_{ij})_{n\times n}$ 中第 $i$ 行的正元素与负元素,则有

$$c_i+\frac{1}{2}q_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^-\leqslant\frac{\partial f}{\partial x_i}\leqslant c_i+\frac{1}{2}q_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^+.$$

又因为矩阵 $\bar{Q}=Q_0+\mathrm{diag}(c_1+\frac{1}{2}q_{11},c_2+\frac{1}{2}q_{22},\cdots,c_n+\frac{1}{2}q_{nn})$ 严格对角占优,即 $|\bar{q}_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^n|\bar{q}_{ij}|$ 或者可以写成

$$\left|c_i+\frac{1}{2}q_{ii}\right|>\sum_{j=1,j\neq i}^n|q_{ij}|=\sum_{j=1,j\neq i}^n(|q_{ij}^+|+|q_{ij}^-|). \quad (3)$$

$\bar{Q}$ 严格对角占优,则必有 $\bar{q}_{ii}\neq 0$.

当 $\bar{q}_{ii}<0$,即 $c_i+\frac{1}{2}q_{ii}<0$,利用 (3) 式可以得到 $-(c_i+\frac{1}{2}q_{ii})>\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^+$,从而 $\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^++c_i+\frac{1}{2}q_{ii}<0$,即 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\leqslant c_i+\frac{1}{2}q_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^+<0$,利用推论,则 $\bar{x}_i=1$.

当 $\bar{q}_{ii}>0$,即 $c_i+\frac{1}{2}q_{ii}>0$,利用 (3) 式可以得到 $c_i+\frac{1}{2}q_{ii}>-\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^-$,从而 $\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^-+c_i+\frac{1}{2}q_{ii}>0$,即 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\geqslant c_i+\frac{1}{2}q_{ii}+\sum_{j=1,j\neq i}^n q_{ij}^->0$,利用推论,则 $\bar{x}_i=0$.

## 3　数值例子

**例 1**　若 $1<c_i<2$,$i=1,2,\cdots,n$,求 0-1 二次规划 $\begin{cases}\min f(x)=-x^Tx+c^Tx\\ \mathrm{s.t.}\ x\in\{0,1\}^n\end{cases}$ 的最优解.

解　由于 $Q=\mathrm{diag}(-2,-2,\cdots,-2)$,故 $\bar{Q}=\mathrm{diag}(c_1-1,c_2-1,\cdots,c_n-1)$,根据已知有 $c_i-1>0$,$i=1,2,\cdots,n$.又由于 $\bar{Q}$ 是严格对角占优矩阵,且 $\bar{q}_{ii}>0$,利用定理,则该 0-1 二次规划的最优解为 $x^*=(0,0,\cdots,0)$.

**例 2**　若 $Q=\begin{bmatrix}15&-4&1&0&2\\-4&-17&2&1&1\\1&2&-25&-8&1\\0&1&-8&30&-5\\2&1&1&-5&-20\end{bmatrix}$,求 0-1 二次规划 $\begin{cases}\min f(x)=\frac{1}{2}x^TQx\\ \mathrm{s.t.}\ x\in\{0,1\}^5\end{cases}$ 的最优解.

解　利用 $Q$ 可以计算出 $\bar{Q}=Q_0+\mathrm{diag}(c_1+\frac{1}{2}q_{11},c_2+\frac{1}{2}q_{22},\cdots,c_n+\frac{1}{2}q_{nn})=$

$$\begin{bmatrix}15/2&-4&1&0&2\\-4&-17/2&2&1&1\\1&2&-25/2&-8&1\\0&1&-8&15&-5\\2&1&1&-5&-10\end{bmatrix}$$

.验证可知

$Q$是严格对角占优矩阵,利用定理,则该 0-1二次规划的最优解为 $x^* = (0, 1, 1, 0, 1)$.

## 4 结束语

本文给出一类 0-1二次规划的一种快速解法.当 $Q$是严格对角占优矩阵时,可以快速获得原 0-1二次规划的最优解,进而可以利用本文的定理来构造一系列的 0-1二次规划做测试函数.该解法在很大程度上丰富了 0-1二次规划的数值实验.

参考文献:

[1] Barhona F. A solvable case for quadratic 0-1 programming[J]. Disecrete Appl Math, 1986, 13 23-26.

[2] Hansen P. Methods of nonlinear zero-one programming[J]. Annals Discrete Math, 1979, 5: 53-70.

[3] Gulati V P, Gupta S K. Unconstrained quadratic bivalent programming problems[J]. European J Oper Res, 1981, 15 121-125.

[4] Panos M Pardalos. Construction of test problems in quadratic bivalent programming[J]. ACM Transactionns on Mathematical Software, 1991, 17(1): 74-87.

[5] 陈伟,张连生. 0-1二次规划的全局最优性条件及算法[D].上海:上海大学,2005.

[6] Roger A Horn, Charles R Johnson. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1990.

(责任编辑:尹 闯)

## 我国学术论文引用率为什么低

中国科协冯长根先生认为我国学术论文引用率低有 4 个原因。

第一就是浮躁风。有的人写论文的目的只是为了评职称,评教授、博导,是为了拿毕业证,拿学位证书,只要有论文就行了,发表是目的,引用不引用无所谓,不管天下还有谁跟他做一样的工作。还有人认为,引用了别人的观点,自己不就算不上创新了嘛?为了戴上创新的帽子,宁愿掩耳盗铃。确有这样的事,我不引用,我不犯错误,但我引用了我就评不上一等奖,为什么?不是原创性了!这是对原创性的片面认识。有了青藏高原,才有喜马拉雅山,才有珠穆朗玛峰。没有这三个层次,就没有珠穆朗玛峰。可是,我们许多论文给人的感觉就是,看不出他的基础工作,同行的工作,不知道他的“青藏高原”在哪,“喜马拉雅山”在哪,但是你已经知道他是“珠穆朗玛峰”了,是世界领先了,这就是浮躁风。

第二就是传统文化的影响,自我谦虚,同时又文人相轻。谦虚使自己原来做得很好的工作不引用。一个科学家从事工作十几年,他发表论文起码有二三十篇,他自己写文章从来不引用自己以前的文章,他认为那是丢脸的,要被别人说是自引,不知从什么时候起,人们认为自引不好。科学技术的连续性、发展性要求不管是谁的,是对的就可以引用。文人相轻使得不屑于引用别人的论文。

第三就是科学历史造成了我们引用少。什么叫科学历史?因为现代科技对中国人来讲是个外来文化,都是舶来品,因此自己的东西没有什么可以引用的。没有引证的需要,没有形成传统。而在西方发达国家,引用是一个传统,是科技界的道德,第一道德就是要引用,公开说张三干的就是比我好,这就是西方传统。

第四是归因于我们在科学技术上不成熟。我们在科学技术上稳定的发展科技才 30年,这 30年对我们来讲很宝贵。但是,我们要实事求是地说,人家已经发展了 200年、300年。科学技术上的不成熟导致了我们缺乏引用,但我们不能等到成熟了才行,我们要跨越式的发展。

所以,提高学术论文引用率,一是写论文的专家要多引用论文,包括别人的论文和自己的论文;二是从事科技管理的专家要鼓励从各方面采取措施提高引用率,把这两件事做好,相信中国学术论文的质量会逐渐提高。