DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 20~22

Powell-Sabin(Ⅱ)型加密三角剖分上的二元三次超样条空间*

Bivariate Cubic Super Spline Spaces Over the Powell-Sabin's Type(Ⅱ) Refinement

范乐乐
FAN Le-le

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)
(Faculty of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要: 利用 B网和最小决定集技术,构造了 Powell-Sabin(Ⅱ)型加密三角剖分上超样条空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的最小决定集,给出该空间的维数及 Hermite插值方案.

关键词: 超样条 决定集 对偶基 Hermite插值
中图法分类号: O24 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)01-0020-03

Abstract Using B-net method, minimal sdeterminig set of super spline space $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ over Powell-Sabin's type (Ⅱ) refinement is constructed; the dimension and a Hermite interpolation scheme of this space are also given.

Key words super spline, determining set, dual basis, Hermite interpolation

给定结点组 $V:=\{(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n\}\subseteq R^2$ 和相应的实数 $\{f_i^{u,v},0\leqslant u+v\leqslant 2,i=1,2,\cdots,n\}$,考虑二元 Hermite插值问题: 寻找函数 $s(x,y)$,使得 $D_x^u D_y^v s(x_i,y_i)=f_i^{u,v},0\leqslant u+v\leqslant 2,i=1,2,\cdots,n$. 解决该问题的通常方法是先构造一个以结点组中的点为顶点的正规三角剖分 $\triangle$,然后在 $\triangle$ 上构造一个二元样条函数空间 $S_d^r(\triangle):=\{s\in C^r(K):s|_T\in P_d,\forall T\in\triangle\}$,或它的超样条子空间 $S_d^{r,\rho}(\triangle):=\{s\in S_d^r(\triangle):s\in C^\rho(v),\forall v\in V\}$,其中 P_d 定义为次数不大于 d 的二元多项式的集合.

在构造样条函数空间时,一般选取相对于光滑度来说次数较低的样条空间.例如,可以选 $r=1,2,d=2,3,4,5$ 的情形.同时,由于确定任意三角剖分 $\triangle$ 上这些样条函数空间的维数极其困难,人们往往要对 $\triangle$ 进行加密.当 $r=2$ 时,文献[1]对 $\triangle$ 中的每个三角形进行二次 Clough-Tocher加密后得到 $\triangle_{DCT}$,构造了样条空间 $S_5^2(\triangle_{DCT})$ 中的一个插值函数;文献[2]对 $\triangle$ 中的每个三角形进行 Powell-Sabin(Ⅰ)型加密后得到 $\triangle_{PS1}$,构造了 $S_5^2(\triangle_{PS1})$ 中的一个插值函数;文献[3]将文献[2]关于 $S_5^2(\triangle_{PS1})$ 的结果推广到超样条空间 $\hat{S}_5^2(\triangle_{PS1})$ 中,从而避免用到顶点处的 C^3 插值数据;文献[4]采用一种特殊的方法对 $\triangle$ 中的每个三角形进行加密后得到 $\triangle_W$,构造了 $S_5^2(\triangle_W)$ 中的一个插值函数,该函数用来插值 $\triangle$ 的顶点处的函数值、导数值以及边上的法向导数值;文献[5]对 $\triangle$ 中的每个三角形进行 Clough-Tocher加密后得到 $\triangle_{CT}$,构造了 $S_6^2(\triangle_{CT})$ 中的一个插值函数.但是,当 $r=1$ 时,相关结论却很少有报道.

本文采用 B网和最小决定集技术[6~9],构造超样条空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的最小决定集,其中 $\triangle_{PS2}$ 为 Powell-Sabin(Ⅱ)型加密三角剖分.给出空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的维数及 Hermite的插值方案.

1 相关概念及引理

任意给定一个三角剖分 $\triangle$,记 V、E 以及 N 分别为 $\triangle$ 中顶点、边和所有三角形的集合;E_I 和 E_B 分别为内边和边界边的集合;V_I 和 V_B 分别为内顶点和边

收稿日期: 2007-12-05
作者简介: 范乐乐(1983-),女,硕士研究生,主要从事多元样条函数及其逼近研究.
* 广西自然科学基金项目(0575029)和广西民族大学研究生教育创新计划项目(0754)资助.

界顶点的集合.作出每个三角形的三条中线,它们的交点记为 v_t,边上的中点记为 v_e,再将所有的中点两两相连,这样就得到 Powell-Sabin(II)型三角剖分,记为 $\triangle_{PS2}$.对于任意 $s\in S_d^r(\triangle)$,它在三角形 $T:=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 上可表示为 $s|_T:=\sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^T B_{ijk}^d$,其中 B_{ijk}^d 为 Bersrein多项式,c_{ijk}^T 为 s 相应于区域点 $Y_{ijk}^T:=(iv_1+jv_2+kv_3)/d$ 的 B网系数.

给定整数 $0\leqslant m<d$,定义集合 $D=\{Y_{ijk}^T: i+j+k=d, T\in N\}$, $R_m^T(v_1)=\{Y_{ijk}^T: i=d-m\}$, $D_m^T(v_1)=\{Y_{ijk}^T: i\geqslant d-m\}$, $R_m(v_1)=\cup\{R_m^T(v_1): T$ 为 $\triangle$ 中以 v_1 为顶点的三角形$\}$, $D_m(v_1):=\cup\{D_m^T(v_1): T$ 为 $\triangle$ 中以 v_1 为顶点的三角形$\}$.

显然,任意函数 $s\in S_d^0(\triangle)$ 可由集合 D 中所有区域点对应的 B网系数唯一决定.对于任意 $Y\in D$,定义 $S_d^0(\triangle)$ 上的线性泛函 $V_Y s:=s$ 相应于区域点 Y 的 B网系数.

引理 1[10] 设 $T_1:=\langle v_0,v_1,v_2\rangle$, $T_2:=\langle v_0,v_1,v_3\rangle$ 是两个相邻的三角形,$e:=\langle v_0,v_1\rangle$ 为公共边.若 $p(x,y)$ 在 $T_l(l=1,2)$ 上的表示为 $P_l(x,y)$,满足 $p_l(x,y)\in P_3$,并且

$$p_1(x,y)=\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}^1 \frac{3!}{i!j!k!} T_1^i U_1^j V_1^k,$$

$$p_2(x,y)=\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}^2 \frac{3!}{i!j!k!} T_2^i U_2^j V_2^k,$$

其中 (T_l,U_l,V_l), $l=1,2$,为 (x,y) 相应于 T_l 的重心坐标.则 $p(x,y)\in C^1(T_1\cup T_2)$ 当且仅当

$$c_{ij0}^2=c_{ij0}^1,\ i+j=3,$$

$$c_{ij1}^2=Tc_{i+1,j,0}^1+Uc_{i,j+1,0}^1+Vc_{ij1}^1,\ i+j=2.$$

要使得 $p(x,y)\in C^2(v_1)$,还需满足

$$c_{012}^2=T^2c_{210}^1+U^2c_{030}^1+V^2c_{012}^1+2UVc_{021}^1+2UTc_{120}^1+2TVc_{111}^1.$$

其中 T,U,V 为顶点 V_3 相应于 T_1 的重心坐标.

2 主要结果

定义样条空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2}):=\{s\in S_3^1(\triangle_{PS2}): s\in C^2(v),\forall v\in V\}$. 考虑单个三角形 T 的 Powell-Sabin(II)型加密剖分 T_{PS2},如图 1所示.按逆时针方向依次将它的边界顶点记为 $v_1,v_e^1,v_2,v_e^2,v_3,v_e^3$;将内顶点记为 w_1,w_2,w_3 以及重心 v_t.

定理 1 $\dim S_3^{1,2}(T_{PS2})=27$,且区域点

(I) $Y_{ijk}^{\langle v_l,w_l,v_e^l\rangle}$, $i\geqslant 1, i+j+k=3, l=1,2,3,$

(II) $Y_{ijk}^{\langle v_t,w_3,v_e^2\rangle}$, $Y_{120}^{\langle v_t,w_2,v_e^1\rangle}$, $i\geqslant 1,k<2,i+j+k=3,$

(III) $Y_{102}^{\langle v_t,w_l,v_e^{l-1}\rangle}$, $l=1,2,3,$

的集合 P_1 是 $S_3^{1,2}(T_{PS2})$ 的最小决定集.

证明 对任意 $s\in S_3^{1,2}(T_{PS2})$,若 s 相应于 P_1 中的区域点对应的 B网系数为零,要证余下的区域点对应的 B网系数也都为零,即 $s\equiv 0$.不妨规定 $v_e^0=v_e^3$.令(I)式中的点对应的 B网系数为零,则由 $v_i(i=1,2,3)$ 处的 C^2 光滑条件可知,$D_2(v_i)$ 内的区域点对应的 B网系数全为零.再令(III)中的点对应的 B网系数为零,由 C^1 光滑条件,$D_1(v_e^l)(l=1,2,3)$ 内的区域点对应的 B网系数全为零.又令(II)中的点对应的 B网系数为零,则由 C^1 光滑条件,$D_2(v_t)$ 内的区域点对应的 B网系数也都为零.根据边 $\langle w_l,v_e^l\rangle$, $\langle w_l,v_e^{l-1}\rangle$ $(l=1,2,3)$ 上的 C^1 光滑条件可求得余下的区域点对应的 B网系数全为零.因此,P_1 为 $S_3^{1,2}(T_{PS2})$ 的一个决定集,$\dim S_3^{1,2}(T_{PS2})\leqslant |P_1|=27$.对于空间 $S_3^{1,2}(T_{PS2})$ 来说,它为 $S_3^1(T_{PS2})$ 的一个子空间,由引理 1可知,T 中区域点对应的 B网系数还需满足额外的 3个等式,所以 $\dim S_3^{1,2}(T_{PS2})\geqslant \dim S_3^1(T_{PS2})-3$.由拟贯穿剖分的维数计算公式[11],可以求得 $\dim S_3^1(T_{PS2})=30$,即 $\dim S_3^{1,2}(T_{PS2})\geqslant 27$.因此,$\dim S_3^{1,2}(T_{PS2})=27$,$P_1$ 为 $S_3^{1,2}(T_{PS2})$ 的最小决定集.

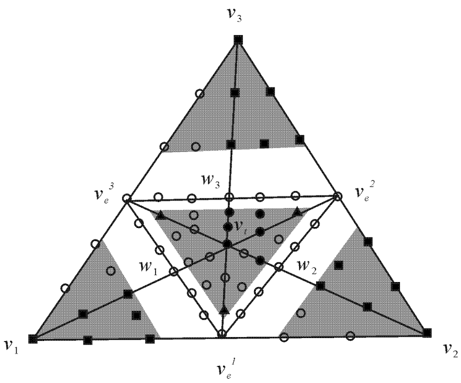

图 1 $S_3^{1,2}(T_{PS2})$ 的最小决定集

Fig. 1 Minimal determining set for $S_3^{1,2}(T_{PS2})$

■: 区域点(I);●: 区域点(II);▲: 区域点(III).

■: Domain point(I);●: Domain point(II);▲: Domain point(III).

定理 2 $\dim S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})=6|V|+6|N|+|E|$.

证明 选择区域点.

(IV)在 $\triangle$ 的每个顶点 v 处选择 $D_2(v)$ 内的 6个区域点.

(V)在 $\triangle$ 的每条边 e 上选择 $D_1(v_e)$ 内的 1个区域点.

(VI)在 $\triangle$ 的每个三角形 T 中选择 $D_2(v_t)$ 内的 6个区域点.

得到一个集合 P,如图 2所示.

假设 $s\in S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$,若 s 相应于 P 中的区域点对

应的 B网系数为零,根据光滑条件,容易证明余下的区域点对应的 B网系数也为零,所以 P 为 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的决定集.因为 $|P| = M = 6|V| + 6|N| + |E|$,则

$$\dim S_3^{1,2}(\triangle_{PS2}) \leqslant 6|V| + 6|N| + |E|.$$

又记 $Y_P = \{V_Y\}_{Y\in P}$ 为 P 中的点 Y对应的线性泛函 V_Y 的集合, 对任意点 Y, 可相应地构造一个函数 $B_Y \in S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$,满足 $V_Y B_Y = 1, V_Z B_Y = 0 (Y \neq Z)$. 显然, $\{B_Y\}_{Y\in P}$ 线性无关,所以有

$$\dim S_3^{1,2}(\triangle_{PS2}) = 6|V| + 6|N| + |E|.$$

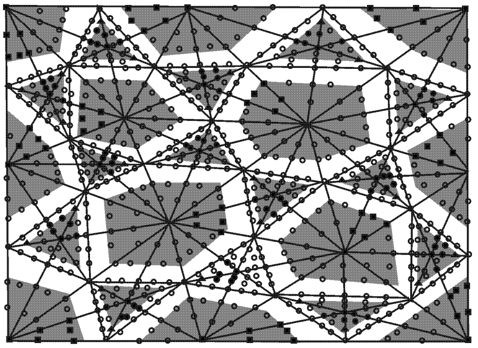

图 2 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的最小决定集

Fig. 2 Minimal determining for $S_3^{1,3}(\Delta_{PS2})$

■: 区域点 (Ⅳ);▲: 区域点 (Ⅴ);●: 区域点 (Ⅵ).

■: Domain point(Ⅳ);▲: Domain point(Ⅴ);●: Domain point(Ⅵ).

定理 2的证明过程中构造的基函数 $\{B_Y\}_{Y\in P}$ 形成空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的一个对偶基.对 B_Y 来说,若 Y落在 $D_2(v)$ 内,则它的支集是△中以 v 为顶点的所有三角形的集合,其中 $v\in V$;若 Y落在 $D_2(v_t)$ 内,且不包括定理 1(Ⅲ)所指的点,则它的支集是△中以 v_t 为重心的三角形;若 Y落在 $D_1(v_e)$ 内,且 $e\in E_I$,则它的支集是以 e 为公共边的两个三角形;若 Y落在 $D_1(v_e)$ 内,且 $e\in E_B$,则它的支集是以 e 为 1条边的三角形.

定理 3 设 $P = \{Y_i\}_{i=1}^{M}$ 为 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的最小决定集.对于任意一组实数 $\{f_i\}_{i=1}^{M}$, 存在唯一插值函数 $s\in S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$,使得

$$V_{Y_i}(s) = f_i, i = 1,2,\cdots,M.$$

证明 取 $s = \sum_{j=1}^{M} f_j B_j$,其中 $B_j = B_{Y_j}, j = 1,\cdots,M$ 为以上定义的空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 相应于最小决定集 P 的一组对偶基, 则 $V_i(s) = V_i(\sum_{j=1}^{M} f_j B_j) = \sum_{j=1}^{M} f_j(V_i B_j) = \sum_{j=1}^{M} f_j W_{i,j} = f_i$.进一步,若存在另一个 $s' \in S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$,也使得 $V_i(s') = f_i, i = 1,2,\cdots,M$,则 $s - s' \in S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$,且 $V_i(s - s') = V_i(s) - V_i(s') = f_i - f_i = 0, i = 1,2,\cdots,M$.因为 P 为空间 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的最小决定集,所以可推出 $s - s'$ 在 $\triangle_{PS2}$ 上所有区域点处的 B网系数全为零,所以 $s - s' \equiv 0, s \equiv s'$.唯一性得证.

对于任意顶点 $v\in V$,只要确定了 $D_2(v)$ 内的 6个区域点的 B网系数就相当于确定了此点处的函数值以及直到二阶的导数值,这样就得到 $S_3^{1,2}(\triangle_{PS2})$ 的一个 Hermite插值方案.

参考文献:

[1] Alfeld P. A bivariate C^2 Clough-Tocher scheme[J]. Comput Aided Geom Des, 1984, 1: 257-267.

[2] Chui C K, Schumaker L L, Utreras F I. Topics in multivariate approximation [M]. New York: Academic Press, 1987: 207-217.

[3] Lai M J. On C^2 quintic spline functions over triangulation of Powell-Sabin triangulation[J]. J Comput APPL Math, 1996, 73: 135-155.

[4] Wang T. A C^2 -quintic spline interpolation scheme on triangulation[J]. Comput Aided Geom Des, 1992, 9: 379-386.

[5] Gao J. A C^2 finite element and interpolation[J]. Computing, 1993, 50: 69-76.

[6] 郭竹瑞,贾荣庆.多元样条研究中 B网方法[J].数学进展, 1990, 19(2): 189-198.

[7] 贾荣庆.多元样条的 B网表示[J].科学通报, 1987, 32(11): 804-807.

[8] Alfeld P. Bivariate spline spaces and minimal determing sets[J]. J Comp Appl Math, 2000, 119: 13-27.

[9] Lai M J, Schumaker L L. Scattered data interpolation using C^2 super splines of degree six[J]. SIAM J Numer Anal, 1997, 34(1): 905-921.

[10] Farin G. Triangular bernstein-Bézier patches[J]. Comput Aided Geometric Des, 1986, 3: 83-128.

[11] 王仁宏.多元样条函数及其应用[M].北京:科学出版社, 1994.

(责任编辑:尹 闯)