不同分布两两 NQD 的强大数定律*

On the Strong Law of Large Numbers for Pairwise NQD Series with Different Distributions

居先祥，吴群英，胡光辉

JU Xian-xiang, WU Qun-ying, HU Guang-hui

（桂林工学院数理系，广西桂林 541004）

(Department of Mathematics and Physics, Guilin Institute of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：讨论一类非常广泛的不同分布随机变量列两两 NQD(Negatively Quadrant Dependent)的性质，在恰当的条件下给出该随机变量列的 Marcinkiewicz 型强大数定律，推广了独立情形下的强大数定律.

关键词：两两 NQD　强大数定律　强收敛性

中图法分类号：O211.4　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2007)04-0357-03

Abstract: In this paper, utilizing some important results of random variable at first, then the Marcinkiewicz type strong laws of large numbers for pairwise NQD series with different distributions are established and some strong laws of large number in the pairwise independent case are extended.

Key words: pairwise NQD random sequences, strong law of large numbers, strong stability

文献[1]中，称 r. v. X 和 Y 是 NQD(Negatively Quadrant Dependent)的，若对 $\forall\ x,y\in R$ 有

$$P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)P(Y<y).$$

称 r. v. 列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两 NQD 的，若 $\forall\ i\neq j$，X_i 与 X_j 是 NQD 的.

这一概念是 Lehmann 在1966年提出来的，此后 Matula 获得了与独立情形一样的 Kolmogorov 型的大数定律[2]. 两两 NQD 是一类非常广泛的随机变量列，利用它可以解决大量现实中存在的问题，对其性质的研究有很重要的意义. 迄今为止，已经有不少文献对两两 NQD 的性质进行了研究. 比如，吴群英[3]讨论了两两 NQD 序列的三级数定理，以及 Macinkiewicz 型的强大数定律，并且得到了与独立情况一样的完全收敛定理；万成高[4]对两两 NQD 列大数定律作过重要的研究；王岳宝等[5]对两两 NQD 列若干极限定理进行了讨论. 本文讨论一类两两 NQD 列，在恰当的条件下给出该随机变量列的 Marcinkiewicz 型的强大数定律.

1 相关引理

本文约定"C"表示与 n 无关的常数，如无特别说明在不同的地方取不同的值，"$\ll$"表示通常的大"O".

引理 1[6]　对事件序列 $\{A_n\}$，随机变量序列 $\{\zeta_n\}$ 及整数序列 $\{n_j;1=n_1<n_2<L\}$，有

(1) 若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(\bigcup\limits_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}A_n)<\infty$，则 $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n)=0$；

(2) 若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(\max\limits_{n_j\leqslant n<n_{j+1}}|\zeta_n|\geqslant\varepsilon)$ 对一切 $\varepsilon>0$ 收敛，则 $\zeta_n\to 0$ a. s. $(n\to\infty)$.

证明　(1) 记 $C_j=\bigcup\limits_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}A_n$，若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(\bigcup\limits_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}A_n)<\infty$，则由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(\overline{\lim_{j\to\infty}}C_j)=0.$$

注意到 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}\bigcup\limits_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}A_n$，可知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}C_n$，于是有 $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n)=0$，即结论成立.

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$，记 $D_n=(|\zeta_n|\geqslant\varepsilon)$，则

收稿日期：2007-04-05

修回日期：2007-06-18

作者简介：居先祥(1981-)，男，硕士研究生，主要从事概率论与数理统计研究。

*国家自然科学基金项目(10661006)资助。

$$\{\max_{n_j\leqslant n<n_{j+1}}|\zeta_n|\geqslant\varepsilon\}=\bigcup_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}D_n.$$

于是，对一切 $\varepsilon>0$，$\sum_{j=1}^{\infty}P(\max_{n_j\leqslant n<n_{j+1}}|\zeta_n|\geqslant\varepsilon)$ 收敛，则 $\sum_{j=1}^{\infty}P(\bigcup_{n=n_j}^{n_{j+1}-1}D_n)<\infty$. 这样，由(1)知

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(|\zeta_n|\geqslant\varepsilon))=0.$$

由此得，$\zeta_n\to0$ a.s. $(n\to\infty)$，故结论成立.

引理 2[3] 设 r.v. X 和 Y 是 NQD 的，则

(1) $EXY\leqslant EXEY$；

(2) $P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)P(Y<y)$，$\forall\, x,y\in R$；

(3) 如 r,s 同为非增（或非降）函数，则 $r(X)$ 与 $s(Y)$ 仍为 NQD.

引理 3[7] 设对 r.v. X 存在 $p>0$，使 $E|X|^p<\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^pP(|X|>x)=0.$$

2 主要结果及证明

定理 1 设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是一两两NQD随机变量列，且满足：

(1) $\mathrm{var}(X_n)<\infty$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^2}{n^2}<\infty$，其中 $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{var}X_k$.

则当 $n\to\infty$ 时，$n\to\infty$ a.s.

证明 不失一般性，不妨设 $EX_n=0,n\geqslant1$. 记 $A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$. 则由引理 2 得

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(\max_{2^m\leqslant n<2^{m+1}}|A_n|\geqslant\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}P(\bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}|A_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}P(|A_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{EA_n^2}{\varepsilon^2}=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{\mathrm{var}(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{n^2\varepsilon^2}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{var}X_k}{n^2\varepsilon^2}=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{B_n^2}{n^2\varepsilon^2}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{B_n^2}{2^{2m}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\frac{B_n^2}{2^{2m}}.$$

这里 l 是满足 $2^{m+1}>n$ 的最小非负整数，由 l 的取法可以知道 $2^{2l+2}>n^2$，即 $\frac{1}{2^{2l}}<\frac{4}{n^2}$，于是有

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=l}^{\infty}\frac{B_n^2}{2^{2m}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_n^2}{2^{2(l+i)}}=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^2}{2^{2l}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4B_n^2}{n^2}g\frac{1}{1-1/4}=$$

$$\frac{16}{3\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^2}{n^2}<\infty.$$

因此

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(\max_{2^m\leqslant n<2^{m+1}}|A_n|\geqslant\varepsilon)<\infty.$$

这样由引理 1 可知，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to0$ a.s. 定理 1 证毕.

若 B_n^2 与 $n\log^{-p}n$，$(p>1)$ 同阶，则有以下的推论.

推论 设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是一两两NQD随机变量列，且满足：(1) $\mathrm{var}(X_n)<\infty$；(2) $B_n^2=O(n\log^{-p}n)$，$p>1$. 则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to0$ a.s.

由定理 1 的证明容易证明推论成立.

定理 2 设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是一两两NQD随机变量列，X 是一随机变量，若它们满足：

(1) $E|X|<\infty$；

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}i^{-2}\mathrm{var}(X_iI(|X_i|<i))<\infty$；

(3) $\exists\,x_0>0$，当 $x>x_0$ 时，$P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x)$，$\forall\,n\geqslant1$.

则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to0$ a.s.

证明 这里不妨设 $X_n\geqslant0$（不然可以分别讨论 $\{X_n^+\}$ 与 $\{X_n^-\}$）. 令

$$X_n^*=X_nI(X_n\leqslant n)+nI(X_n>n).$$

则由引理 2 可知，$\{X_n^*\}$ 还是两两 NQD 列.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((X_k-X_k^*)+(X_k^*-EX_k^*)+(EX_k^*-EX_k))AI_1+I_2+I_3,$$

故只需证明当 $n\to\infty$ 时，$I_1\to0$，$I_2\to0$，a.s. $I_3\to0$ 即可.

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq X_n^*)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n>n)\ll\sum_{n=1}^{\infty}P(X>n)\ll E|X|<\infty,$$

故由 Borel-Cantelli 引理知 $I_1\to0$ a.s.

记 $T_n=\sum_{k=1}^{n}X_k^*$，$n_k=[a^k]$，某 $a>1$，$\forall\,\varepsilon>0$，根据 Chebyshev 不等式以及 $[a^k]\geqslant\frac{a^k}{2}$ 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|T_{n_k}-ET_{n_k}|>\varepsilon n_k)\leqslant\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{var}T_{n_k}}{n_k^2}\leqslant$$

$$\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-2}\sum_{m=1}^{n_k}\mathrm{var}X_m^*=\varepsilon^{-2}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{var}X_m^*\sum_{k:[a^k]>m}[a^k]^{-2}\leqslant$$

$$4\varepsilon^{-2}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{var}X_m^*\sum_{k:[a^k]>m}a^{-2k}\leqslant4\varepsilon^{-2}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{var}X_m^*\sum_{k\geqslant\log_a m}a^{-2k}\leqslant$$

$$\frac{4\varepsilon^{-2}}{1-a^{-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{var}X_m^*}{m^2}\leqslant$$

$$\frac{4\varepsilon^{-2}}{1-a^{-2}}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}((\mathrm{var}(X_m I(|X_m|\leqslant m)))+$$
$$\mathrm{var}(mI(|X_m|>m)))\leqslant$$
$$\frac{4\varepsilon^{-2}}{1-a^{-2}}\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}(\mathrm{var}(X_m I(|X_m|\leqslant m)))+$$
$$E|X|<\infty.$$

由此可得，当 $k\to\infty$ 时，$n_k^{-1}(T_{n_k}-ET_{n_k})\to 0$ a.s.

因为 $n_k\uparrow+\infty$，故 $\forall\, n\in N$，$\exists\, k\in N$，使 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$，故

$$\frac{T_{n_k}-ET_{n_{k+1}}}{n_{k+1}}\leqslant\frac{T_n-ET_n}{n}\leqslant\frac{T_{n_{k+1}}-ET_{n_k}}{n_k}.$$

而

$$\frac{T_{n_{k+1}}-ET_{n_k}}{n_k}=\frac{T_{n_{k+1}}-ET_{n_{k+1}}}{n_{k+1}}\cdot\frac{n_{k+1}}{n_k}+$$
$$\frac{\sum_{m=n_k}^{n_{k+1}}EX_m^*}{n_k}\triangleq I_{11}+I_{12}.$$

$$\lim_{k\to\infty}I_{11}=0\times a=0 \text{ a.s.}$$

$$0\leqslant I_{12}=\frac{\sum_{m=n_k+1}^{n_{k+1}}EX_m^*}{n_k}\leqslant E|X|\ \frac{n_{k+1}-n_k}{n_k}\leqslant$$
$$E|X|(a^2-1).$$

从而

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{T_{n_{k+1}}-ET_{n_k}}{n_k}\leqslant E|X|(a^2-1),$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T_n-ET_n}{n}\leqslant E|X|(a^2-1).$$

另一方面，我们用上面同样的方法可以得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T_n-ET_n}{n}\geqslant E|X|(\frac{1}{a^2}-1).$$

令 $a\downarrow 1$ 得到

$$0\leqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{T_n-ET_n}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{T_n-ET_n}{n}\leqslant$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T_n-ET_n}{n}\leqslant 0,$$

故当 $n\to\infty$ 时 $I_2\to 0$ a.s.

$$|EX_n^*-EX_n|=|E(-X_nI(X_n>n)+nI(X_n>n))|\leqslant EX_nI(X_n>n)+nP(X_n>n)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)P(k<X_n\leqslant k+1)+nP(X_n>n)=$$
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m}(kP(X_n>k)-(k+1)P(X_n>k+1)+P(X_n>k))+nP(X_n>n)=\lim_{m\to\infty}(nP(X_n>n)-(m+1)P(X_n>m+1)+\sum_{k=n}^{\infty}P(X_n>k))+nP(X_n>n).$$

由于 $E|X|<\infty$，又因为 $\exists\ x_0>0$，当 $x>x_0$ 时，$P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x)$ 及引理 3) 可知

$$\lim_{n\to\infty}nP(X_n>n)\leqslant C\lim_{n\to\infty}nP(X>n)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(X_k>k)\leqslant C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(X>k)=0.$$

从而 $EX_n^*-EX_n\to 0$，$n\to\infty$. 由 Toeplitz 引理可知 $I_3\to 0$，$n\to\infty$.

综上可知 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to 0$，$n\to\infty$，a.s. 定理 2 证毕.

参考文献：

[1] LEHMANN E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 43:1137-1153.

[2] ATULA P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett, 1992, 15(3):209-213.

[3] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3):617-624.

[4] 万成高. 两两 NQD 的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2):253-261.

[5] 王岳宝, 苏淳. 关于两两 NQD 列的若干极限性质[J]. 应用数学学报, 1998, 21A(3):404-414.

[6] 邹新堤. 柯尔莫哥洛夫强大数定律的推广[J]. 武汉大学学报：自然科学版, 1983(3):1-6.

[7] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础[M]. 北京：高等教育出版社, 2003.

(责任编辑：尹　闯　邓大玉)

科学家找到化学官能团与碳纳米管间相互作用的测定方法

从未来新型传感器和纳米装置工程的发展角度出发，人们必须认识碳纳米管和各个化学官能团相互间的作用。碳纳米管十分微小，这导致人们很难测定单一分子在碳纳米管表面的附着力。过去研究人员只能依赖模型、间接测量和较大微尺度实验。美国科学家将纳米管探针的接触区域减少到1.3纳米，采用化学力显微镜方法准确地测定出单一官能团与碳纳米管的附着力，碳纳米管和官能团之间的相互作用力并不遵循常规极化增强的趋势，而是依赖于它们两者间复杂的电子相互作用。测定官能团和碳纳米管间相互作用的能力可帮助人们在今后设计纳米复合材料、纳米传感器或分子组装时，消除人为的猜想，从而制造出更好更强的材料以及更灵敏的装置和传感器。

(据科学网)