房子图 $H_{m,n,3}$ 的优美性和强协调性*
The Gracefulness and Strong Harmoniousness of Home Graphs

孙宗剑[1]，罗海鹏[2]，黎贞崇[2]，何建东[2]
SUN Zong-jian[1]，LUO Hai-peng[2]，LI Zhen-chong[2]，HE Jian-dong[2]

（1.广西师范学院数学与计算机科学系，广西南宁 530001；2.广西科学院，广西南宁 530007）
（1. Department of Mathematics and Computer Science，Guangxi Teachers Education University，Nanning，Guangxi，530001，China；2. Guangxi Academy of Sciences，Nanning，Guangxi，530007，China）

摘要：定义一类新的图形——房子图 $H_{m,n,3}$，设计一个算法并通过计算机给出房子图的优美标号和强协调标号，从而证明其不但是优美的而且是强协调的.

关键词：房子图 标号 优美性 强协调性
中图法分类号：O157.5；TP312 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)04-0339-03

Abstract：A class new graphs-home graphs $H_{m,n,3}$ are defined. An algorithm is designed. The $H_{m,n,3}$'s graceful labeling and strongly harmonious labeling are given by computer. So that $H_{m,n,3}$ is not only graceful but also strongly harmonious.

Key words：home graphs，labeling，gracefulness，strong harmoniousness

20 世纪 60 年代提出的图的标号问题[1]正逐渐发展成为组合数学中的一个热门课题.至目前为止，在学术界已经定义了几十种优美图和强协调图[1,2]，这些标号图作为数学模型在物流运输、编码理论、x-射线密码技术、雷达、天文学、电路设计、因特网地址通讯和数据基础管理[3]等方面有广泛应用.20 世纪 70 年代后，随着计算机科学的发展，在寻求某些图[4,5]的优美标号和强协调标号方面有了进一步的突破.本文设计算法找到了房子图的优美标号和强协调标号，并给出了其优美性和强协调性的证明.

1 主要定义

定义 1[1] 对于图 $G(V,E)$ 来说，若存在单射 f：$V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 使得映射 $f^*(xy)=|f(x)-f(y)|$ 是从 $E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 的双射，则称 f 为 G 的顶点的优美标号，这时称 G 为优美的.

定义 2[6] 对于图 $G(V,E)$ 来说，若存在单射 f：$V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|-1\}$ 使得映射 $f^*(xy)=f(x)+f(y)$ 是从 $E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 的双射，则称 f 为 G 的顶点的强协调标号，这时称 G 为强协调的.

定义 3 如图 1 所示的图形中有 $V(H_{m,n,3})=\{x_1,x_2,x_3,v_1,v_2,\cdots,v_n,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$x_iv_j\in E(H_{m,n,3})$，$i=1,2,3$，$j=1,2,\cdots,n$，$x_1u_j\in E(H_{m,n,3})$，$j=1,2,\cdots,m$，$x_1x_j\in E(H_{m,n,3})$，$j=2,3$，$x_2x_3\in E(H_{m,n,3})$，$v_iu_j\in E(H_{m,n,3})$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$，$|V(H_{m,n,3})|=m+n+3$，$|E(H_{m,n,3})|=mn+m+3n+3$，把满足上述条件的图形称为房子图，记为 $H_{m,n,3}$.

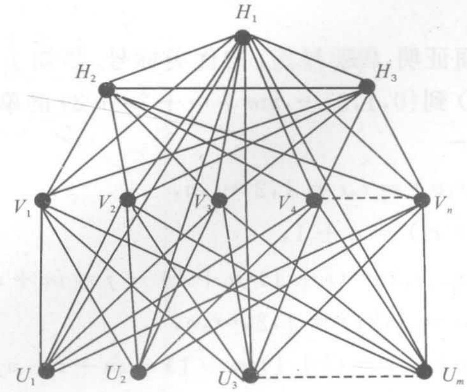

图 1 房子图
Fig. 1 home graph

收稿日期：2006-11-10
作者简介：孙宗剑(1980-)，男，硕士研究生，主要从事组合数学研究。
*国家自然科学基金项目(批准号：60563008)，广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)资助。

2 算法

对于房子图 $H_{m,n,3}$，设计一个算法，对较小的 m，n 用遍历算法[7] 探索一些特殊房子图的优美标号或强协调标号方法并寻找规律. 算法如下：

步骤 1：输入 m,n；

步骤 2：在 $0,1,\cdots,mn+m+3n+3$ 或 $0,1,\cdots,mn+m+3n+2$ 中选 $m+n+3$ 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+n+3}$；

步骤 3：给出顶点 v_i 到 a_i，$i=1,2,\cdots,m+n+3$ 的一个对应；

步骤 4：计算图中所有边的值，

如果某一条边的值和前面计算的边的值重复了，

如果 v_i 到 a_i 还有其他对应，转步骤 3，

否则，如果 $mn+m+3n+4$ 或 $mn+m+3n+3$ 个数中选 $m+n+3$ 个数还有其他方案，转步骤 2，

否则，结束；

步骤 5：找到了一个优美标号或强协调标号方法，输出所有顶点的标号值，转步骤 3 到 v_i 到 a_i 的下一个对应，寻找下一个优美标号或强协调标号方法.

通过算法，我们用计算机计算获得了当 m,n 较小时的一些特殊房子图 $H_{m,n,3}$ 的优美标号和强协调标号方法，分析这些标号方法进一步获得一般的房子图 $H_{m,n,3}$ 的优美标号和强协调标号方法.

3 主要定理

定理 1 房子图 $H_{m,n,3}$ 都是优美的.

证明 只需给出房子图 $H_{m,n,3}$ 的优美标号即可. 给出图 1 中各个顶点的标号 f 如下：

$f(x_1)=0$；$f(x_{i+1})=(i+1)(n+1)$，$i=1,2$；$f(v_i)=i$，$i=1,2,\cdots,n$；$f(u_i)=(i+3)(n+1)$，$i=1,2,\cdots,m$. 边的标号 f^* 定义为 $f^*(xy)=|f(x)-f(y)|$.

下面证明 f 是 $H_{m,n,3}$ 的优美标号. 易知 f 是从 $V(H_{m,n,3})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,mn+m+3n+3\}$ 的单射并且

$$f^*(x_1v_i)=i,i=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

$$f^*(x_2x_3)=n+1, \tag{2}$$

$$f^*(x_{i+1}v_j)=(i+1)(n+1)-j=in+i+n-j+1,i=1,2;j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

$$f^*(x_1x_{i+1})=(i+1)(n+1)=in+i+n+1,\ i=1,2, \tag{4}$$

$$f^*(u_iv_j)=(i+3)(n+1)-j=in+i+3n-j+3,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n, \tag{5}$$

$$f^*(x_1u_i)=(i+3)(n+1)=in+i+3n+1,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{6}$$

由(1)式可知相应边的标号取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的数，由(2)式可知相应边的标号取 $n+1$，由(3)式可知相应边的标号取遍 $\{n+1,n+2,\cdots,2n+1,2n+3,2n+4,\cdots,3n+2\}$ 中的数，由(4)式可知相应边的标号分别取 $2n+2$ 和 $3n+3$，由(5)式可知相应边的标号取遍 $\{(i+2)n+i+3,(i+2)n+i+4,\cdots,(i+3)n+i+2|i=1,2,\cdots,m\}$ 中的数，由(6)式可知相应边的标号取遍 $\{(i+3)n+i+3|i=1,2,\cdots,m\}$ 中的数. 于是边标号 f^* 是从 $E(H_{m,n,3})$ 到集合 $\{1,2,\cdots,mn+m+3n+3\}$ 的双射，从而 f 是 $H_{m,n,3}$ 的顶点的一个优美标号. 所以房子图 $H_{m,n,3}$ 是优美的.

定理 2 房子图 $H_{m,n,3}$ 都是强协调的.

证明 只需给出房子图 $H_{m,n,3}$ 的强协调标号即可. 给出图 1 中各个顶点的标号 f 如下：

$f(x_1)=n+1$；$f(x_2)=0$；$f(x_3)=2n+2$；$f(v_i)=i$，$i=1,2,\cdots,n$；$f(u_i)=(i+2)(n+1)=in+2n+i+2$，$i=1,2,\cdots,m$. 边的标号 f^* 定义为 $f^*(xy)=f(x)+f(y)$.

下面证明 f 是 $H_{m,n,3}$ 的强协调标号. 易知 f 是从 $V(H_{m,n,3})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,mn+m+3n+2\}$ 的单射并且

$$f^*(x_2v_i)=i,i=1,2,\cdots,n, \tag{7}$$

$$f^*(x_ix_{i+1})=i(n+1)=in+i,i=1,2, \tag{8}$$

$$f^*(x_1v_i)=n+i+1,i=1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

$$f^*(x_3v_i)=2n+i+2,i=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

$$f^*(x_1x_3)=3n+3, \tag{11}$$

$$f^*(u_iv_j)=(i+2)(n+1)+j=in+2n+i+j+2,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n, \tag{12}$$

$$f^*(x_1u_i)=(i+3)(n+1)=in+3n+i+3,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{13}$$

由(7)式可知相应边的标号取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的数，由(8)式可知相应边的标号分别取 $n+1$ 和 $2n+2$，由(9)式可知相应边的标号取遍 $\{n+2,n+3,\cdots,2n+1\}$ 中的数，由(10)式可知相应边的标号取 $\{2n+3,2n+4,\cdots,3n+2\}$ 中的数，由(11)式可知相应边的标号取 $3n+3$，由(12)式可知相应边的标号取遍 $\{(i+2)n+i+3,(i+2)n+i+4,\cdots,(i+3)n+i+2|i=1,2,\cdots,m\}$ 中的数，由(13)式可知相应边的标号取遍 $\{(i+3)n+i+3|i=1,2,\cdots,m\}$ 中的数. 于是边标号 f^* 是从 $E(H_{m,n,3})$ 到集合 $\{1,2,\cdots,mn+m+3n+3\}$ 的双射，从而 f 是 H_{m+n+3} 的顶点

的一个强协调标号.所以房子图 $H_{m,n,3}$ 是强协调的.

由定理1、定理2可得如下推论1、推论2.

推论1[8] 塔图都是优美的.

证明 当 $m=1$ 时的房子图 $H_{1,n,3}$ 变成了塔图 T_{n+4}(如图2所示),因此由定理1知塔图也是优美的.

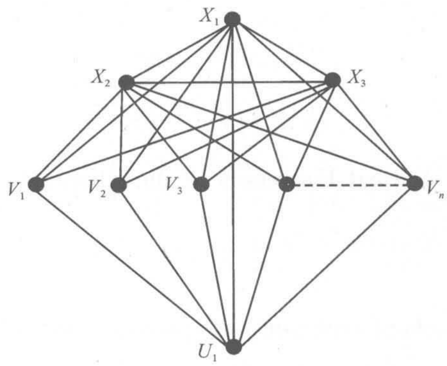

图2 塔图

Fig.2 Tower graph

推论2[9] 塔图都是强协调的.

证明 当 $m=1$ 时的房子图 $H_{1,n,3}$ 变成了塔图 T_{n+4},因此由定理2知塔图也是强协调的.

参考文献:

[1] JOSEPH A GALLIAN. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatics, 2005, #DS6(5):1-148.

[2] 梁志和.关于图标号问题[J].河北师范大学学报:自然科学版,2000,24(3):300-303.

[3] 邦迪J A,默蒂U S R.图论及其应用[M].吴望名,李念祖,吴兰芳,等译.北京:科学出版社,1984.

[4] 王卫军,严谦泰.关于图 $D_{m,4}$ 的奇优美性和奇强协调性[J].南阳师范学院学报:自然科学版,2003,2(9):1-2.

[5] 哈拉里F.图论[M].李慰萱,译.上海:上海科学技术出版社,1980.

[6] 徐士达. S_m+K_1 及其相关图的协调性[J].上饶师专学报,1993(5):1-3.

[7] 朱洪,陈增武,段振华,等.算法设计和分析[M].上海:上海科学技术文献出版社,1989.

[8] 徐云,苏文龙,罗海鹏,等.塔图的优美性[J].广西科学院学报,2007,23(3):133-134.

[9] 孙宗剑,罗海鹏.塔图 T_n 的强协调性[J].桂林工学院学报,2006,26(4):589-590.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第338页 Continue from page 338)

[7] LUO HAIPENG, SU WENLONG, YUN-QIU SHEN. New lower bounds of ten classical Ramsey Numbers[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2001(24):81-90.

[8] LUO HAIPENG, SU WENLONG, LI ZHENCHONG. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2002 (25): 103-116.

[9] SU WENLONG, LI QIAO, LUO HAIPENG, et al. Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues [J]. Discrete Mathematics, 2002(250):197-209.

[10] LI GUIQING, SU WENLONG, LUO HAIPENG. Edge colorings of the complete graph K_{149} and the lower bounds of three Ramsey numbers[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003(126):167-179.

[11] LUO HAIPENG, SU WENLONG, YUN-QIU SHEN. New lower bounds for two multicolor classical Ramsey numbers[J]. Radovi Matematicki, 2004(13):15-21.

(责任编辑:尹 闯)