关于 Thompson 定理的一个注记*
A Note on Thompson Theorem

钟祥贵,李勇刚
ZHONG Xiang-gui,LI Yong-gang

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)
(School of Mathematical Sciences,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:证明有限群 G 是幂零的,如果满足:G' 幂零,G 有素数 r 阶自同构 α 使得 $r \notin \pi(C_G(\alpha))$,并且 G 有 α-不变的幂零极大子群 H 使得 $C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H)$ 且 H 的 Sylow 2-子群的幂零类 $\leqslant 2$. 该结果推广了 Thompson 定理.

关键词:有限群 自同构 极大子群 幂零群
中图法分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0332-02

Abstract:It is proved that a finite group G is nilpotent if G' is nilpotent and G has prime r order automorphism α such that $r \notin \pi(C_G(\alpha))$ for α-invarant nilpotent maximal subgroup H of G with $C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H)$ and $c(H_2) \leqslant 2$. This conclusion generalizing the theorem of Thompson.

Key words:finite group,automorphism,maximal subgroup,nilpotent group

本文考虑的群均为有限群,所用符号和术语均是标准的.如果 G 是一个群,$\pi(G)$ 表示 G 之阶的素因子集;对任一素数 p,G_p 表示 G 的 Sylow p-子群;$[K]H$ 表示 G 的正规子群 K 和子群 H 的半直积.

1964 年,Thompson J[1] 证明了具有素数阶无不动点自同构的有限群是幂零群后,许多学者对这一著名结果进行了推广,例如:

定理 1[2] 设 α 是 G 的素数 r 阶自同构,H 是 G 的 α-不变幂零 Hall 子群且 $r \notin \pi(G)$,$C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H)$,$H \trianglelefteq G$ 时 $C_H(\alpha) \trianglelefteq G$. 如果 G 的 Sylow 2-子群是交换群或者 r 不是 Fermat 素数,那么 G 是幂零的.

定理 2[3] 设 α 是 G 的素数 r 阶自同构且 $r \notin \pi(C_G(\alpha))$. 如果对于 G 的 α-不变 Hall 子群 H,$C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H)$ 且 H 的 Sylow 2-子群交换,则 G 是幂零群.

联想到 Deskins-Janko-Thompson[1] 关于群的可解性的定理,我们自然地会问定理 1 和定理 2 中的"Hall 子群"能否用"极大子群"代替,"H 有交换的 Sylow 2-子群"能否用"H 的 Sylow 2-子群的幂零类 $\leqslant 2$"代替.

以下定理 3 和定理 4 给出了上述问题的一个肯定回答.

定理 3 设 α 是 G 的素数 r 阶自同构且 $r \notin \pi(C_G(\alpha))$. 如果 G' 幂零,G 有 α-不变的幂零极大子群 H 满足 $C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H)$ 且 H 的 Sylow 2-子群的幂零类 $\leqslant 2$,那么 G 是幂零群.

证明 如果定理结论不成立,不妨设 G 是一个极小阶反例,那么有

(a) $C_G(\alpha) \neq 1$,$\Phi(H) \neq 1$. 这是因为若 $C_G(\alpha) = 1$,说明 G 有素数 r 阶无不动点自同构 α,由 Thompson 定理[1] 知 G 是幂零群. 与假设矛盾.

(b) G 中不存在非平凡的 α-不变 r-子群.

若不然,设 $1 \neq R \leqslant G, R^\alpha = R$,那么 $R \cap Z(R < \alpha >) \leqslant C_G(\alpha)$. 但是 $r \notin \pi(C_G(\alpha))$,所以 $r \notin \pi(C_R(R < \alpha >))$,$R = 1$. 导出矛盾.

(c) G 可解.

由 Deskins-Janko-Thompson 定理[1] 可得.

(d) $\Phi(G) = 1$.

反设 $\Phi(G) > 1$. 令 $N = \Phi(G)$,则 N 为 α-不变,且 $N \leqslant H$. 所以 $C_{G/N}(\alpha) = C_G(\alpha)N/N \leqslant \Phi(H)N/N \leqslant \Phi(H/N)$,从而 G/N 幂零. 这意味着 G 亦幂零. 与假设矛盾,从而 $\Phi(G) = 1$.

(e) H 为 G 的 Hall 子群.

事实上,对于素数 p,如果 $1 < H_p < G_p$. 由于 H 幂零可知,$H < N_G(H_p) \leqslant G$. 又因为 H 是极大的,所

收稿日期:2007-03-28
修回日期:2007-06-14
作者简介:钟祥贵(1963-),男,副教授,主要从事代数教学和群论研究。
*广西科学基金项目(0575050,0640061),广西研究生教育创新计划项目(2007106020701M51)资助。

以 $H_p \trianglelefteq G$. 考虑 G/H_p 与 H/H_p,并注意 H_p char H,故 $H_p^\alpha = H_p$. 由(b)得 $p \neq r$. 从而 $C_{G/H_p}(\alpha) = C_G(\alpha)H_p/H_p \leqslant \Phi(H)H_p/H_p \leqslant \Phi(H/H_p)$,那么,$G/H_p$ 幂零. 这意味着 $H \trianglelefteq G$,$C_G(\alpha) \leqslant \Phi(H) \leqslant \Phi(G) = 1$. 与(a)矛盾.

(f)$\Phi(H) \cap H_{p'} = \Phi(H_{p'})$.

如果 $\Phi(H_{p'}) = 1$,则 $\Phi(H) \cap H_{p'} = 1$. 否则存在 H 的非单位正规子群 $Q \in \mathrm{Syl}_q(\Phi(H) \cap H_{p'})$ 使得 $Q < H_q$,显然 H_q 为初等交换 q- 群. 又由 Maschke 定理[1] 有 $H_q = Q \times Q_1$,其中 Q_1 是 H_q' 不变的且 $1 < Q_1 \trianglelefteq H$. 设 M 是包含 Q_1H_q' 的 H 的极大子群,则 $H = Q(Q_1H_q') = QM = \Phi(H)M = M$. 导出矛盾. 如果 $\Phi(H_{p'}) \neq 1$,则由 $\Phi(H_{p'}/\Phi(H_{p'})) = 1$,那么 $1 = H_{p'}/\Phi(H_{p'}) \cap \Phi(H/\Phi(H_{p'})) = H_{p'}/\Phi(H_{p'}) \cap \Phi(H)/\Phi(H_{p'})$,故 $\Phi(H) \cap H_{p'} = \Phi(H_{p'})$.

(g)H 为 G 的 Sylow 2- 子群.

假设 H 不是 G 的 Sylow 子群. 由于对任意的 $p \in \pi(H)$,$H \leqslant N_G(H_p) \leqslant G$. 如果 $H_p \trianglelefteq G$,那么 H_p 是 G 的 α- 不变正规 p- 子群,模仿(e)的证明可导出矛盾. 所以 $N_G(H_p) < G$,而 $H = N_G(H_p)$. 由 Wielandt 定理[1] 知,存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G = HK$,$H \cap K = 1$. 现在,π 群 H 作用在 π' 群 K 上,根据文献[1]中引理 3.1,K 有 H 不变 Sylow q- 子群 $K_q > 1$. 由 H 的极大性知,$G = HK_q$. 从而 $K_q \trianglelefteq G$,$G = [K_q]H$. 其中 K_q 是 G 的 α- 不变正规 q- 子群. 如果 H 不是 2- 群,取 H 的 Sylow p- 子群 P,$(p > 2)$. 若 $G \neq N_G(Z(J(P)))$,由 $H \leqslant N_G(Z(J(P))) < G$ 知 $H = N_G(Z(J(P)))$,从而 $N_G(Z(J(P)))$ 是幂零群,根据文献[1]中定理 5.1,G 是 p- 幂零的. 记 $T = K_qH_{p'}$,则 $G = [T]H_p$,由(f)知,$C_T(\alpha) \leqslant \Phi(H) \cap T = \Phi(H) \cap H_{p'} = \Phi(H_{p'})$. 对 K_q 的任意特征子群 $S \neq 1$ 有 $H < HS \leqslant G$,而 H 极大,所以 $HS = G$,从而 K_q 为初等交换 q- 群. 又由于 $\Phi(T) = 1$,$H_{p'}$ 为 T 的极大子群. 由 G 的极小性知 T 幂零. 从而 $H_{p'} \trianglelefteq G$. 当 $H_{p'} \neq 1$ 时,H 中存在正规 Sylow 子群,模仿(e)的证明同样可导出矛盾. 所以 $H_{p'} = 1$,H 为 p- 群,$G = [K_q]H_p$. 由于 $p > 2$,根据定理 2 知 G 幂零. 导出矛盾. 所以 $Z(J(P))$ 是 G 的正规子群. 再由(e)的证明知,$G/Z(J(P))$ 幂零,$H \trianglelefteq G$. 同样导出矛盾. 所以,H 为 G 的 Sylow 2- 子群.

最后考虑到 G 没有正规 p- 子群 V. 否则导致 $G/O^p(G)$ 幂零,$H \trianglelefteq G$. 导出矛盾. 由(f)及 G' 幂零得 $G' \cap H$ char G',所以 $G = [G'(p)]H$,这里 $p = 2$,而 $G'(p) = O^p(G)G'$. 从而 $G/G'(p) \cong H$,利用文献[1]中命题 1.2 知 H 交换. 再由定理 2 得 G 幂零. 与假设矛盾. 所以,极小阶反例不存在,即 G 是幂零群.

定理 4 设 α 是 G 的素数 r 阶自同构且 $r \notin \pi(C_G(\alpha))$. 如果 G 有 α- 不变的幂零极大子群 H,其 Sylow 2- 子群交换,那么 G 是幂零群.

由定理 3 的证明过程,容易证明定理 4 成立.

参考文献:

[1] 徐明曜,黄建华,李慧陵,等. 有限群导引(下册)[M]. 北京:科学出版社,1999:50-74.

[2] 李世余,张劲松. 带算子的有限群幂零性的一个结果[J]. 广西大学学报:自然科学版,1992,3(17):1-6.

[3] 路在平,王品超. 有一个稳定子群是 F-群的素数阶自同构的有限 π-群[J]. 数学学报,2000,43(5):871-874.

(责任编辑:尹 闯)

生物酶使纳米印刷成为可能

微接触印刷能在大表面做快速的高分辨图形转印而受到广泛应用,但其墨水的扩散影响图形转印的分辨率。比如小分子的高效转印需要模板与底物接触 10～1000s,在此期间由于墨水的扩散和气相介质的转移使得印记边缘变得模糊,要获得清晰的图形分辨率必须大于 100nm。如果采用非扩散过程的图形转印则能突破 100 nm 这个限制。

非扩散图形转印是利用固定在模板上的催化剂对底物进行化学反应而实现修饰的。最近科学家利用生物酶的高选择性和高反应性,成功地开发出一种催化平版印刷技术。

催化平版印刷技术是使用聚丙烯酰胺侧链的镍络合物固定的核酸外切酶成功的对 ssDNA 进行了刻蚀印刷,通过共焦荧光显微镜观测,刻蚀率达到 70%,分辨率不再受墨水扩散因素的限制,而仅与催化剂的活性范围有关。因而这一特性对纳米印模技术具有很高的开发前景。

(据科学网)