具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能反应干扰系统的全局稳定性

Global Stability of a Mutual Interference System with Functional Response of Holling-Tanner Type Ⅲ

潘红卫
PAN Hong-wei

(广西广播电视大学区直分校,广西南宁　530022)
(Quzhi Branch School of Guangxi Radio and TV University, Nanning, Guangxi, 530022, China)

摘要:对具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应的 Leslie 捕食与被捕食模型引入干扰常数,得到具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应和干扰的非自治 Leslie 捕食系统,然后,先利用微分方程定性理论证明该系统在适当条件下是持久的,再利用泛函分析的 Brouwer 不动点定理和构造 Lyapunov 泛函的方法得到该系统正周期解存在且全局渐近稳定的充分条件.

关键词:Holling-Tanner Ⅲ 类功能反应　持久性　周期解　全局稳定性

中图法分类号:O175　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0221-03

Abstract: A class of non-autonomous mutual interference system with functional response of holling-tanner type Ⅲ is obtained with an interference constant being introduced to the Leslie pedeter and preyer model with functional response of holling-tanner type Ⅲ. It is proved by differential equation qualitative theory that the system is permanent under proper conditions. By Brouwer fixed point theory and constructing a suitable Lyapunov functional, the sufficient conditions are established for the global asymptotic stability of the periodic solution for the system.

Key words: Holling-Tanner type Ⅲ, persistence, periodic solution, gobal stability

近年来,Leslie 捕食系统受到部分学者所关注[1~5],他们考虑具有 Holling-Tanner 类功能性反应的 Leslie 捕食与被捕食模型,得到了很好的结果. Hassell[6]在研究圆柄姬蜂攻击它们的寄生粉斑螟的行为特征时,发现当两个搜寻的寄生虫相遇时,其中之一或两个都具有离开该相遇地方的趋势,显然寄生物本身在搜寻寄主时相互间有干扰,这个干扰是随寄生物密度的增加而增加的,因此 Hassell 引进了干扰常数 $m(0<m\leqslant 1)$ 的概念. 受他们的工作启发,我们认为在捕食系统中除了要考虑捕食者具有功能性反应之外,还应该考虑捕食者之间存在相互干扰. 然而,对具有干扰的 Leslie 捕食系统的研究在文献中很少见,因此,我们对具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应的 Leslie 捕食与被捕食模型引入干扰常数,得到如下具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应和干扰的非自治 Leslie 捕食系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)x(t) - b(t)x^2(t) - \\ \qquad \dfrac{c(t)x^2(t)}{k + x^2(t)}y^m(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = h(t)y(t) - \dfrac{e(t)y^2(t)}{x(t)} \\ \qquad x(0) > 0, y(0) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$x(t)$ 表示食饵种群在时刻 t 的密度,$y(t)$ 表示捕食者种群在时刻 t 的密度,$m(0<m\leqslant 1)$ 是干扰系数. 在系统(1)中,假设系数 $a(t),b(t),c(t),h(t),e(t)$ 在$[0,+\infty)$上均为连续和严格正的有界函数.

首先,我们应用微分方程定性理论,证明系统(1)在某些条件下是持久的;其次,若系统是周期系统,我们利用泛函分析的 Brouwer 不动点定理和构造 Lyapunov 函数的方法得到系统正周期解存在且全局渐近稳定的充分条件.

为了方便,我们给出一些假设条件和记号.

收稿日期:2007-03-14
作者简介:潘红卫(1966-)女,讲师,主要从事常微分方程理论和应用研究。

假设：

(Ⅰ) $M_1 > M_1^* = \frac{a^u}{b^l}$, $M_2 > M_2^* = \frac{h^u}{e^l}M_1$, M_1, M_2 为常数；

(Ⅱ) $0 < m_1 < m_1^* = \frac{1}{b^u}(a^l - \frac{c^u M_2^m}{2\sqrt{k}}) > 0$, m_1 为常数；

(Ⅲ) $m_2 < m_2^* = \frac{m_1 h^l}{e^u}$, m_2 为常数.

记：$R_+^2 = \{(x,y) \in R^2 | x > 0, y > 0\}$,

$\Omega_0 = \{(x,y) \in R^2 | 0 < x(t) \leqslant M_1, 0 < y(t) \leqslant M_2\}$,

$\Omega = \{(x,y) \in R_+^2 | m_1 \leqslant x(t) \leqslant M_1, m_2 \leqslant y(t) \leqslant M_2\}$.

对于连续有界函数 $f(t)$，记：$f^u = \sup\limits_{[0,+\infty)} \{f(t)\}$，$f^l = \inf\limits_{[0,+\infty)} \{f(t)\}$.

1 系统的持久性

引理 1 R_+^2 是系统(1)的不变集.

证明 由于 $x(t) = x(0)\exp\int_0^t [a(s) - b(s)x(s) - \frac{c(s)x(s)y^m(s)}{k + x^2(s)}]ds$,

$$y(t) = y(0)\exp\int_0^t [h(s) - e(s)\frac{y(s)}{x(s)}]ds,$$

所以，当 $x(0) > 0, y(0) > 0$ 时，$x > 0, y > 0$. 引理 1 得证.

引理 2 若假设条件(Ⅰ)成立，则 $\exists\ T_2 > 0$，当 $t > T_2$ 时，系统(1)的任一个解 $(x(t), y(t)) \in \Omega_0$，即系统是有界的.

证明 由系统(1)的第一个方程得，$x'(t) \leqslant x(t)[a(t) - b(t)x(t)] \leqslant x(t)[a^u - b^l x(t)]$，则 $[x(t)\exp\{a^u t\}]' \leqslant \frac{(a^u)^2}{b^l}\exp\{a^u t\}$,

两边积分得

$$x(t)\exp\{a^u t\} - x(0) \leqslant \frac{a^u}{b^l}\exp\{a^u t\} - \frac{a^u}{b^l},$$

$$x(t) \leqslant \frac{a^u}{b^l} + [x(0) - \frac{a^u}{b^l}]\exp\{-a^u t\},$$

由此有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) \leqslant \frac{a^u}{b^l}$，从而，存在 $T_1 > 0$ 和 $M_1 > M^*$，当 $t \geqslant T_1$ 时，$x(t) \leqslant M_1$.

由系统(1)的第二方程得，当 $t \geqslant T_1$ 时，$y'(t) \leqslant y(t)[h^u - e^l\frac{y(t)}{M_1}]$.

同理可证，存在 $T_2 \geqslant T_1$ 和 $M_2 > M_2^*$，当 $t \geqslant T_2$，有 $y(t) \leqslant M_2$. 结合引理 1，引理 2 得证.

定理 1 若假设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则 $\exists\ T > 0$，当 $t \geqslant T$ 时，系统(1)的任一个解 $(x(t), y(t)) \in \Omega$，从而系统(1)是持久的.

证明 由引理 2 知：当 $t > T_2$ 有 $x'(t) \geqslant x(t)[a(t) - b(t)x(t) - \frac{c(t)x(t)}{k + x^2(t)}M_2^m]$.

注意到，$k + x^2(t) \geqslant 2\sqrt{k}\,x(t)$，则 $x'(t) \geqslant x(t)[a^l - \frac{c^u M_2^m}{2\sqrt{k}} - b^u x(t)]$，存在 $T_3 \geqslant T_2$ 和 $0 < m_1 < m_1^*$，当 $t > T_3$ 时，$x(t) \geqslant m_1$.

事实上，若 $x(t) < m_1$，则 $b^u(m_1^* - x(t)) \geqslant b^u(m_1^* - m_1) := \delta$，$x'(t) \geqslant x(t)\delta$，从而 $x(t) \geqslant x(0)\exp\{\delta t\}$，则当 $t \to +\infty$ 时，有 $x(t) \to +\infty$，矛盾.

由系统(1)的第 2 个方程知，当 $t > T_3$ 时，$y'(t) \geqslant y(t)[h^l - e^u\frac{y(t)}{m_1}]$.

同理可证，存在 $T \geqslant T_3$ 和 $0 < m_2 < m_2^*$，当 $t > T$ 时，$x(t) \geqslant m_2$.

因此，定理 1 得证.

2 周期解的全局渐近稳定性

假设系统(1)中 $a(t), b(t), c(t), h(t), e(t)$ 均具有正 ω 周期函数，则系统(1)为正 ω 周期系统. 把周期系统(1)具有正初始值 $W^0 = (x^0, y^0)$ 的解记为 $W(t, W^0) = (x(t, W^0), y(t, W^0))$，对于 $t > 0$，

$W(0, W^0) = W^0$.

定义 Poincare 映射 $A: R_+^2 \to R_+^2$ 为 $AW^0 = W(\omega, W^0)$，$W^0 \in R_+^2$，其中 ω 是系统(1)的周期，这样系统(1)的周期解的存在性等价于 A 的不动点的存在性.

定理 2 若假设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则周期系统(1)至少存在一个严格的正 ω-周期解.

证明 由定理 1 知，Ω 是系统(1)的不变集，$W^0 \in \Omega \Rightarrow W(t, W^0) \in \Omega$，知 $W(\omega, W^0) \in \Omega$，则 $A\Omega \subset \Omega$，由解对初值的连续依赖性，则 A 是连续的. 而 Ω 又是闭的有界凸集，由 Brouwer 定理得系统(1)至少存在一个不动点.

定义 系统(1)的正周期解 $W^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$ 是全局渐近稳定，如果对任意正解 $W(t) = (x(t), y(t))$，都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} |W(t) - W^*(t)| = 0$.

定理 3 若假设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)以及(Ⅳ) $b^l + \frac{kc^u m_2^m}{(k + M_1^2)^2} > \frac{c^u M_2^m}{4k} + \frac{e^u M_2}{m_1^2}$ 和(Ⅴ) $\frac{e^l}{M_1} > \frac{mc^u}{2\sqrt{k}}(\frac{1}{m_2})^{1-m}$ 成立，则系统(1)存在唯一全局渐近稳定的正 ω-周期解.

证明 设 $W^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$ 是由定理 2 得到的一个正周期解，$W(t) = (x(t), y(t))$ 是系统

(1) 的任意解，且满足初始值 $x(0)>0, y(0)>0$.
令 $\overline{x(t)}=\ln x(t)$，$\overline{y(t)}=\ln y(t)$，$\overline{x^*(t)}=\ln x^*(t)$，$\overline{y^*(t)}=\ln y^*(t)$，对于 $t>0$，有

$$\overline{x(t)}'-\overline{x^*(t)}'=-b(t)[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}y^m(t)+\frac{c(t)x^*(t)}{k+x^{*2}(t)}y^{*m}(t)=$$

$$-b(t)[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}y^m(t)+\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}y^{*m}(t)-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}y^{*m}(t)+\frac{c(t)x^*(t)}{k+x^{*2}(t)}y^{*m}(t)=-b(t)[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}[y^m(t)-y^{*m}(t)]-$$

$$[\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}-\frac{c(t)x^*(t)}{k+x^{*2}(t)}]y^{*m}(t)=-b(t)[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}m\zeta^{m-1}(t)[y(t)-y^*(t)]-\frac{c(t)[k-x^*(t)x(t)][x(t)-x^*(t)]}{[k+x^2(t)][k+x^{*2}(t)]}y^{*m}(t)=$$

$$-b(t)[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}m\zeta^{m-1}(t)[y(t)-y^*(t)]-\frac{c(t)[k-x^*(t)x(t)][x(t)-x^*(t)]}{[k+x^2(t)][k+x^{*2}(t)]}\cdot y^{*m}(t)=-\{b(t)+\frac{c(t)[k-x^*(t)x(t)]y^{*m}(t)}{[k+x^2(t)][k+x^{*2}(t)]}\}\cdot[x(t)-x^*(t)]-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}m\zeta^{m-1}(t)[y(t)-y^*(t)],$$

其中 $\zeta(t)$ 是在 $y(t)$ 与 $y^*(t)$ 之间.

$$\overline{y(t)}'-\overline{y^*(t)}'=-e(t)[\frac{y(t)}{x(t)}-\frac{y^*(t)}{x^*(t)}]=-e(t)[\frac{y(t)}{x(t)}-\frac{y^*(t)}{x(t)}+\frac{y^*(t)}{x(t)}-\frac{y^*(t)}{x^*(t)}]=-\frac{e(t)}{x(t)}[y(t)-y^*(t)]+\frac{e(t)y^*(t)}{x(t)x^*(t)}[x(t)-x^*(t)],$$

定义 Lyapunov 函数 $V=|\overline{x(t)}-\overline{x^*(t)}|+|\overline{y(t)}-\overline{y^*(t)}|$.

由系统(1) 的解来估计 $V(t)$ 的右上导数，得

$$D^+V\leqslant-\{b(t)+\frac{c(t)[k-x(t)x^*(t)]y^{*m}(t)}{[k+x^2(t)][k+x^{*2}(t)]}-\frac{e(t)y^*(t)}{x(t)x^*(t)}\}|x(t)-x^*(t)|-[\frac{e(t)}{x(t)}-\frac{c(t)x(t)}{k+x^2(t)}\cdot\frac{m}{(\zeta(t))^{1-m}}]|y(t)-y^*(t)|\leqslant-\{b^l+\frac{c^lkm_2^m}{(k+M_1^2)^2}-\frac{c(t)x(t)x^*(t)y^{*m}(t)}{[k+x^2(t)][k+x^{*2}(t)]}-\frac{e^uM_2}{m_1^2}\}|x(t)-x^*(t)|-[\frac{e^l}{M_1}-\frac{c^ux(t)}{2\sqrt{k}x(t)}\cdot\frac{m}{m_2^{1-m}}]|y(t)-y^*(t)|\leqslant-\{b^l+\frac{c^lkm_2^m}{(k+M_1^2)^2}-\frac{c^ux(t)x^*(t)M_2^m}{2\sqrt{k}x(t)\cdot2\sqrt{k}x^*(t)}-\frac{e^uM_2}{m_1^2}\}|x(t)-x^*(t)|]-[\frac{e^l}{M_1}-\frac{c^u}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{m}{m_2^{1-m}}]|y(t)-y^*(t)|\leqslant$$

$$-[b^l+\frac{c^lkm_2^m}{(k+M_1^2)^2}-\frac{c^uM_2^m}{4k}-\frac{e^uM_2}{m_1^2}]|x(t)-x^*(t)|-[\frac{e^l}{M_1}-\frac{c^u}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{m}{m_2^{1-m}}]|y(t)-y^*(t)|,\ (t>T).$$

当 $b^l+\frac{kc^lm_2^m}{(k+M_1^2)^2}>\frac{c^uM_2^m}{4k}+\frac{e^uM_2}{m_1^2}$，$\frac{e^l}{M_1}>\frac{mc^u}{2\sqrt{k}}(\frac{1}{m_2})^{1-m}$ 时，令 $\beta=\min\{b^l+\frac{c^lkm_2^m}{(k+M_1^2)^2}-\frac{c^uM_2^m}{4k}-\frac{e^uM_2}{m_1^2},\frac{e^l}{M_1}-\frac{c^u}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{m}{m_2^{1-m}}\}$.

则 $D^+V\leqslant-\beta[|x(t)-x^*(t)|+|y(t)-y^*(t)|]$.

$$V(t)+\beta\int_T^t[|x(s)-x^*(s)|+|y(s)-y^*(s)|]\mathrm{d}s\leqslant V(T)<+\infty,$$

$$\int_T^{+\infty}[|x(s)-x^*(s)|+|y(s)-y^*(s)|]\mathrm{d}s\leqslant\frac{V(T)}{\beta}<+\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x^*(t)|=0,\ \lim_{t\to+\infty}|y(t)-y^*(t)|=0,$$

所以，系统(1)的正周期解是全局渐近稳定的，而且是唯一的.

3 结束语

具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应和干扰的非自治 Leslie 捕食系统(1)若满足假设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)，则是持久的，即两种群长期共存，不会灭绝. 对于具有 Holling-Tanner Ⅲ 类功能性反应和干扰的 Leslie 捕食周期系统，若满足(Ⅰ)～(Ⅲ)和(Ⅳ)、(Ⅴ)，则系统存在唯一的正周期解，即两种群长期共存，并产生生物周期振荡.

参考文献：

[1] BUTLE G J, FREDMAN H I. Periodic solutions of a predator-prey system with periodic coefficients[J]. Math Biosci, 1981, 55(1): 27-38.

[2] HSU S B, HUANG T W. Global stability for a class of predator-prey systems[J]. SIAMJ Appl Math, 1995, 55(3): 763-783.

[3] WANG Q, FAN M, WANG K. Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator-prey systems with functional responses[J]. Math Anal Appl, 2003, 278(2): 443-471.

[4] 梁志清，陈兰荪. 一类基于比例确定的 Leslie 系统正周期解的存在性[J]. 应用数学学报，2005，18(2)：313-318.

[5] 高建国. 基于比率的 Holling-Tanner 系统全局渐近稳定性[J]. 生物数学学报，2005，20(3)：165-168.

[6] HASSELL M F. Mutual interference between searching insect parasites[J]. Anim Ecol, 1971, 40(2): 473-486.

(责任编辑：尹 闯 邓大玉)