广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):213～216

一种含参数的模糊互补判断矩阵元素与优先权重的逻辑关系

A Logic Relation of Elements in Fuzzy Complementary Judgment Matrix with Parameter and Priorities

兰继斌，王中兴，乐　琦
LAN Ji-bin, WANG Zhong-xing, YUE Qi

（广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004）
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要：基于一致性转换公式，揭示一种含参数的模糊互补判断矩阵的元素与优先权重新的逻辑关系．阐述一致性及标度仅能确定方案的序关系，不能确定方案的优先权重等重要结论，进而拓展了模糊层次分析法．说明合理的选择参数 α，能很大程度地满足决策者对客观事物的信息偏好，纠正人们对模糊层次分析法优先权重确定的某些错误认识．

关键词：模糊层次分析法　优先权重　模糊判断矩阵

中图法分类号：O159;C934　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)03-0213-04

Abstract: Based on the consistent transformation formula, the logic relation of elements of fuzzy consistent complementary judgment matrix containing parameter with priority is pointed out. It can explain why the scales and condition of consistency can be only used to determine the order of alternatives, but not priorities. The fuzzy analytical hierarchy process (FAHP) is extended. The rational choice of parameter α can satisfy the decision maker's information preference. Some false cognitions in determining the priorities of fuzzy analytical hierarchy process is rectified.

Key words: fuzzy analytical hierarchy process (FAHP), priority, fuzzy complementary judgment matrix

层次分析法是 Saaty[1]首次提出，该方法是定量和定性分析相结合的多目标决策方法，能够分析目标准则体系层次间的非序列关系，综合测度决策者的判断和比较．其关键是获取决策者完备的偏好信息，构造判断矩阵，再运用适当的技术确定优先权重．为了改进 Saaty 的层次分析法中诸如判断一致性与矩阵一致性的差异、一致性检验的困难等问题，一些学者提出了模糊层次分析法(FAHP)[2~4]及各种求解模糊互补判断矩阵的方法[5~11]．在此基础上，本文基于两类判断矩阵的一致性转换公式，得出一种含参数的模糊互补判断矩阵的元素与优先权重新的逻辑关系，并对参数 α 进行了分析讨论．

收稿日期：2006-09-21
作者简介：兰继斌(1962-)，男，副教授，博士，主要从事决策分析研究。

1　预备知识

设 $\widetilde{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为备选方案集，记 $I=\{1,2,\cdots,n\}$．决策者依据某准则 C 对 $\widetilde{A}$ 中的方案两两进行重要性比较，构造判断矩阵．

定义 1.1[1]　设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 a_{ij} 满足条件：①$a_{ij}>0,\forall\ i,j\in I$；②$a_{ii}=1,\forall\ i\in I$；③$a_{ij}=1/a_{ji},\forall\ i,j\in I$，则称 A 为正互反判断矩阵．

元素 a_{ij} 表示方案 A_i 对方案 A_j 的相对重要程度，a_{ij} 越大，表示方案 A_i 比方案 A_j 越重要．

定义 1.2[1]　设正互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $a_{ij}=a_{ik}/a_{jk},\forall\ i,j,k\in I$，则称 A 为一致性正互反判断矩阵．

定义 1.3[12]　设矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$，若 r_{ij} 满足条件：①$r_{ij}\geqslant 0,\forall\ i,j\in I$；②$r_{ii}=0.5,\forall\ i\in I$；③$r_{ij}+$

$r_{ji} = 1, \forall\, i,j \in I$，则称 R 为模糊互补判断矩阵.

元素 r_{ij} 表示方案 A_i 优于方案 A_j 的相对程度，r_{ij} 越大，表示方案 A_i 比方案 A_j 越优.

定义 1.4[13] 设模糊互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$，若 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, \forall\, i,j,k \in I$ 则称 R 为模糊一致性互补判断矩阵.

引理 1.1[4] 当 R 为模糊一致性互补判断矩阵时，矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 的元素与优先权重向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 有如下关系：$r_{ij} = b(w_i - w_j) + 0.5, i,j \in I$，其中 $b \geqslant (n-1)/2$.

文献[14]采用最小二乘法求解各个方案的权重值的主要结论是：

$$w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}, i \in I, \tag{1.1}$$

$$|w_i - w_j| \leqslant \frac{1}{n-1}, i,j \in I. \tag{1.2}$$

由(1.2)式可知，当阶数 n 较大时，权重的偏差很小，这可能使得上述方案失去意义.

定理 1.1 设 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致性互补判断矩阵，则通过转换公式

$$a_{ij} = \alpha^{r_{ij} - 0.5}, \forall\, i,j \in I, \tag{1.3}$$

其中 $1 < \alpha \leqslant \varphi$ 为标度转换控制参数，可得一致性正互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

证明 显然 $a_{ij} > 0$，由 $r_{ii} = 0.5$，可得 $a_{ii} = \alpha^0 = 1$. 又因为 $r_{ij} + r_{ji} = 1$，所以

$$a_{ij}a_{ji} = \alpha^{r_{ij} - 0.5}\alpha^{r_{ji} - 0.5} = \alpha^0 = 1,$$

即 A 是正互反判断矩阵. 当 R 一致时，有 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, \forall\, i,j,k \in I$，

$$\frac{a_{ik}}{a_{jk}} = \frac{\alpha^{r_{ik} - 0.5}}{\alpha^{r_{jk} - 0.5}} = \alpha^{r_{ik} - r_{jk}} = \alpha^{r_{ij} - 0.5} = a_{ij},$$

所以 A 也一致.

当 A 是 $1-9$ 标度下矩阵时，易知 $1 < \alpha \leqslant \varphi = 81$ 可以保证 $1/9 \leqslant a_{ij} \leqslant 9$. 其它标度可以类似得到. 当 $r_{ij} > 0.5$ 时，$a_{ij} = \alpha^{r_{ij} - 0.5} > \alpha^0 = 1$，$r_{ij} < 0.5$ 时，$a_{ij} = \alpha^{r_{ij} - 0.5} < \alpha^0 = 1$，这说明转换后方案的序关系不变. 所以这种转换是科学的、合理的.

2 模糊互补判断矩阵元素与优先权重新的逻辑关系

定理 2.1 模糊互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 是一致性判断矩阵的充分必要条件是，存在正的归一化向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 及 α，使得

$$r_{ij} = \log_\alpha w_i - \log_\alpha w_j + 0.5, i,j \in I, \tag{2.1}$$

其中，$1 < \alpha \leqslant \varphi$ 为标度转换控制参数.

证明 (1) 必要性. 设 $1 < \alpha \leqslant \varphi$，令

$$w_i = \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, i \in I, \tag{2.2}$$

则 $\forall\, i \in I$ 有 $w_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，又由 R 的一致性，$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, \forall\, i,j,k \in I$，有

$$\log_\alpha w_i - \log_\alpha w_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{jk} =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ik} - r_{jk}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ij} - 0.5) = r_{ij} - 0.5,$$

即 $r_{ij} = \log_\alpha w_i - \log_\alpha w_j + 0.5, i,j \in I$.

(2) 充分性. 若 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 的元素 r_{ij} 满足 $r_{ij} = \log_\alpha w_i - \log_\alpha w_j + 0.5, i,j \in I$，其中 $1 < \alpha \leqslant \varphi, w_i > 0, i \in I$ 且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，因为

$$r_{ij} = \log_\alpha w_i - \log_\alpha w_k - (\log_\alpha w_j - \log_\alpha w_k) + 0.5$$
$$= (\log_\alpha w_i - \log_\alpha w_k) + 0.5 - ((\log_\alpha w_j - \log_\alpha w_k) + 0.5) + 0.5 = r_{ik} - r_{jk} + 0.5.$$

所以，模糊互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 是一致的.

由(2.1)式及 $1 < \alpha$ 可得 $r_{ij} < 0.5 \Leftrightarrow w_i < w_j$，$r_{ij} > 0.5 \Leftrightarrow w_i > w_j$，$r_{ij} = 0.5 \Leftrightarrow w_i = w_j$，说明选择正的归一化向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 作为评价方案优劣程度的优先权重是合理的.

Saaty[1] 认为当 A 为一致性正互反判断矩阵时，矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的元素与优先权重 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 有如下关系：

$$a_{ij} = w_i / w_j, \forall\, i,j \in I.$$

因为在一致性转换公式(1.3)下，$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 一致 $\Leftrightarrow R = (r_{ij})_{n\times n}$ 一致，所以由 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 一致及(1.3)式，可得 $\alpha^{r_{ij} - 0.5} / \alpha^{r_{ji} - 0.5} = w_i / w_j$，两边取对数，得

$$\log_\alpha w_i - r_{ij} = \log_\alpha w_j - r_{ji}. \tag{2.3}$$

定理 2.1 揭示了模糊互补判断矩阵的元素与优先权重新的逻辑关系，为模糊层次分析法中确定方案优先权重提供一种新的途径.

对模糊互补判断矩阵，我们可以通过构造下面的优化模型确定方案的优先权重.

定理 2.2 模糊互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 可以通过求解下面的优化模型确定优先权重 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$.

$$(\mathrm{P1})\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\log_\alpha w_i - r_{ij}) - (\log_\alpha w_j - r_{ji}))^2, \\ st. \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i > 0, i \in I, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中，$1 < \alpha \leqslant \varphi$ 为标度转换控制参数，这时仍有

$$w_i = \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, i \in I.$$

证明 用拉格朗日乘子法将(P1)转化为无约束规划问题：$(\mathrm{P2})\min L(w,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\log_a w_i - r_{ij}) - (\log_a w_j - r_{ji}))^2 + 2\lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$ $\frac{\partial L}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n}((\log_a w_i - r_{ij}) - (\log_a w_j - r_{ij}))\frac{1}{w_i \ln\alpha} + 2\sum_{j=1}^{n}((\log_a w_j - r_{ji}) - (\log_a w_i - r_{ji}))\frac{1}{-w_i \ln\alpha} + 2\lambda$，令 $\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0$，得

$$2\sum_{j=1}^{n}((\log_a w_i - r_{ij}) - (\log_a w_j - r_{ji})) + \lambda w_i \ln\alpha = 0, i \in I. \tag{2.5}$$

(2.5)式两端对 i 求和，由约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，得 $2n\sum_{i=1}^{n}\log_a w_i - 2n\sum_{j=1}^{n}\log_a w_j + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ji} - r_{ij}) + \lambda\ln\alpha = 0$.

所以 $\lambda = 0$，代入(2.5)式，解方程组：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}((\log_a w_i - r_{ij}) - (\log_a w_j - r_{ji})) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i > 0, i \in I. \end{cases}$$

得 $w_i = \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, i \in I$.

3 主要结论

结论 1 对模糊互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$，方案的序关系只与其对应的判断矩阵行的元素和有关，而与标度转换控制参数 $1 < \alpha \leqslant \varphi$ 的选取无关.

证明 因为对于 $1 < \alpha \leqslant \varphi$ 及 $\forall\, i,j \in I$，有 $w_i(\alpha)/w_j(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}} / \alpha^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{jk}} = \alpha^{\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} r_{ik} - \sum_{k=1}^{n} r_{jk})}$，所以 $w_i(\alpha) > w_j(\alpha) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} r_{ik} > \sum_{k=1}^{n} r_{jk}$. 因此，结论 1 成立.

结论 2 对于模糊一致性互补判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$，方案的优先权重是参数 α 的函数. 适当地调整 α 可以调节方案的优先权重的分辨率.

证明 不妨设 $w_i(\alpha) > w_j(\alpha)$，由结论 1 的证明可知，令 $t_{ij} = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} r_{ik} - \sum_{k=1}^{n} r_{jk})$，则 $w_i(\alpha)/w_j(\alpha) = \alpha^{t_{ij}}$，从而 $w_i(\alpha)/w_j(\alpha)$ 是关于 α 的增函数，且 $\lim_{\alpha\to 1} w_i(\alpha)/w_j(\alpha) = 1$.

由此看出参数 α 起到调节方案优先权重的分辨率的作用.

结论 3 由引理 1.1 及定理 2.1 可得，模糊互补判断矩阵元素与优先权重向量 $w = (w_1, \mathrm{L}, w_n)^{\mathrm{T}}$，拓广到一般意义下具有的函数形式为：

$a_{ij} = f(w_i - w_j), \forall\, i,j \in I$ 或 $a_{ij} = f(w_i/w_j)$，$\forall\, i,j \in I$.

这说明模糊互补判断矩阵与正互反判断矩阵在这种转换意义下是等价的.

结论 4 方案的优先权重是参数 α 的函数，因而确定的是一族优先权重向量 $w(\alpha) = (w_1(\alpha), \mathrm{L}, w_n(\alpha))^{\mathrm{T}}$. 当 α 取值不同时，将得到不同的优先权重向量，但不会改变方案的序关系. 这说明具有一致性正互反矩阵可以确定方案的序关系，但不能确定优先权重. 这进一步说明一致性条件及标度确定方案的优先权重信息是不完善的.

4 参数 α 的选择及优先权重的确定

从心理物理学的角度看，当客观事物之间偏差很小时，人们不容易分辨出来. 比如对于音量分别为 40 分贝和 41 分贝，如果不用仪器测定，人们很难分辨谁大谁小. 此时就需要考虑参数 α，用来调节它们之间的差距，以满足决策者对优先权重分辨率的要求.

记最优方案对应的优先权重为 $w^+(\alpha) = \max_{i\in I}\{w_i(\alpha)\}$，次最优方案对应的优先权重为 $w^-(\alpha) = \max_j w_j(\alpha), j \in I/\{\max_{i\in I}\{w_i(\alpha)\}\}$. 考虑比值 $\tau = w^-(\alpha)/w^+(\alpha)$ 作为衡量对方案优先权重分辨率重视程度的相对指标，显然 $0 < \tau < 1$，则

$$\tau = w^-(\alpha)/w^+(\alpha) = a^{\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}{}^{-} r_k - \sum_{k=1}^{n}{}^{+} r_k)}, \tag{4.1}$$

其中，$\sum_{k=1}^{n}{}^{+} r_k$ 是次最优方案对应于模糊互补判断矩阵的行和，$\sum_{k=1}^{n}{}^{-} r_k$ 是最优方案对应于模糊互补判断矩阵的行和. 从(4.1)式解得

$$\alpha = \tau^{n/(\sum_{k=1}^{n}{}^{-} r_k - \sum_{k=1}^{n}{}^{+} r_k)}. \tag{4.2}$$

由此，通过决策者对优先权重分辨率重视程度 τ 就可以计算出参数 α，考虑 $1 < \alpha \leqslant \varphi$，进一步根据(2.2)式可得方案的优先权重.

例 设有模糊一致性互补判断矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

当 $\varphi = 59049$，就有 $1/9 \leqslant a_{ij}(\alpha) \leqslant 9$，按照不同决策者对分辨率的偏好，分别取 $\tau_1 = 0.8, \tau_2 = 0.5$，则 $1 < \alpha_1 = 3.05176 < \varphi, 1 < \alpha_2 = 1024 < \varphi$，计算结果分别为：

$w(\alpha_1) = (0.4098, 0.3279, 0.2623)^T$,

$w(\alpha_2) = (0.5714, 0.2857, 0.1429)^T$.

参数 τ 是决策者对客观事物的认识分辨率重视程度的偏好，参数 τ 的选择取决于决策者的分辨水平，例中，$\tau = 0.8$ 时意味着决策者的分辨能力较好，$\tau = 0.5$ 时意味着决策者的分辨能力较差.

因此，用模糊层次分析法进行决策时，除了考虑模糊互补判断矩阵的一致性，还必须考虑决策者对客观事物的认识分辨率程度的偏好 α，否则，不能确定方案的优先权重.

5 结束语

本文基于一致性转换公式，揭示了一种含参数的模糊互补判断矩阵元素与优先权重新的逻辑关系，阐述了每一模糊互补判断矩阵与一族优先权重相对应，标度及一致性仅能确定方案的序关系，而不能确定方案的优先权重等重要结论，进而拓展了模糊层次分析法. 该方法能充分利用决策者的决策信息偏好，对决策分析的理论与方法的发展无疑是有益的.

对不具有一致性的正互反判断矩阵，定理 2.2 提供了一种新的调整途径. 考虑到文章的篇幅，有关该方法的应用有待进一步研究.

参考文献：

[1] SAATY T L. Modeling unstructured decision problems—— the theory of analytical hierarchies [J]. Math Compute Simulation, 1978, 20: 147-158.

[2] GONG W F, JYE L Y, CHYUAN L M. Using the fuzzy analytic hierarchy process on optimum spatial allocation [J]. International Journal of Industrial Ergonomics, 2004, 33(6): 553-569.

[3] ROBERT C, JAMES B. Fuzzy hierarchical analysis: the Lambda-Max method[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(2): 181-195.

[4] 张吉军. 模糊层次分析法(FAHP)[J]. 模糊系统与数学，2000, 14(2): 80-88.

[5] 樊治平，胡国奋. 模糊判断矩阵一致性逼近及排序方法[J]. 运筹与管理，2000, 9(3): 21-25.

[6] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报，2001, 16(4): 311-314.

[7] 李洪杰. 三标度法在群体判断和 Fuzzy 判断中的应用[J]. 系统工程理论与实践，2001, 21(7): 87-91.

[8] 樊治平，姜艳萍. 模糊判断矩阵排序方法研究的综述[J]. 系统工程，2001, 19(5): 12-18.

[9] 庞彦军，刘开第. 层次分析法一致性检验不是排序的必要条件[J]. 河北建筑科技学院学报，2002, 19(4): 77-78.

[10] BEYNON, MALCOLM. DS/AHP method: a mathematical analysis, including an understanding of uncertainty [J]. European Journal of Operational Research, 2002, 140(1): 148-164.

[11] 张吉军. 模糊互补判断矩阵排序的一种新方法[J]. 运筹与管理，2005, 14(2): 59-63.

[12] 姚敏，张森. 模糊一致矩阵及其在软科学中的应用[J]. 系统工程，1997, 15(2): 54-57.

[13] 姚敏，张森. 模糊一致矩阵及其在决策分析中的应用[J]. 系统工程理论与实践，1998, 18(5): 78-81.

[14] 吕跃进. 基于模糊一致矩阵的模糊层次分析法的排序[J]. 模糊系统与数学，2002, 16(2): 79-85.

（责任编辑：邓大玉）

自动除菌离子技术能有效杀灭沙雷氏菌

"自动除菌离子"技术是夏普公司开发出的一种空间净化方法。它利用空气中的水分子在放电条件下生成的离子来破坏病菌细胞的细胞膜，从而达到除菌的目的。最近夏普公司和美国哈佛大学公共卫生学院组成了联合研究小组，共同验证了"自动除菌离子"技术对沙雷氏菌的杀灭效果。使用这项技术，研究人员 38min 即可杀灭 $40m^3$ 的密闭空间内 99% 的沙雷氏菌。沙雷氏菌是一种革兰氏阴性杆菌，是引发医院内感染的一种病原菌，它也存在于普通家庭的洗脸池、浴室等湿度高的环境中。体弱的人若吸入含沙雷氏菌的飞沫，容易患肺炎等疾病。

（据科学网）