关于边数 $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$ 的(p,q)图的泛圈性研究
On Pancyclic of (p,q)-Graphs with Size $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$

唐干武[1],唐高华[2],王 敏[3]
TANG Gan-wu[1],TANG Gao-hua[2],WANG Min[3]

(1.桂林师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西桂林 541001;2.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001;3.烟台大学数学与信息科学系,山东烟台 264005)
(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guilin Teachers College, Guilin, Guangxi, 541001, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers College, Nanning, Guangxi, 530001, China; 3. Department of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai, Shandong, 264005, China)

摘要:应用图包装的理论和方法研究 $n(n \geqslant 5)$ 阶(p,q)图的泛圈性,得到当 $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$ 时是泛圈图的充要条件是:(1)G 不为 $C_{2,8}$,$C_{3,8}$,$C_{4,9}$,$K_2 \vee (\overline{K_1} + \overline{K_{2,2}})$,$\overline{K_1 + K_{2,4}}$;(2)$G$ 不为 $C_{1,n}$,$C_{3,7}$,$C_{2,7}$,$C_{2,6}$,$C_{2,5}$,$\overline{2K_3}$,$\overline{K_2 + K_3}$,$\overline{K_1 + K_{2,3}}$ 和$\overline{C_4 + K_1}$ 及其支撑子图.
关键词:泛圈图 Hamilton 图 嵌入 包装
中图法分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)03-0206-03
Abstract: The pancyclic of the $n(n \geqslant 5)$ −order (p,q) − graphs is discussed by using the method and theory of graph packing. The sufficient and necessary condition for the pancyclic graphs with $n(n \geqslant 5)$ −order (p,q) − graphs at size $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$ is obtained as follows: (1) the pancyclic graphs are not the graphs of $C_{2,8}$, $C_{3,8}$, $C_{4,9}$, $K_2 \vee (\overline{K_1} + \overline{K_{2,2}})$, $\overline{K_1 + K_{2,4}}$; (2) the pancyclic graphs are not the graphs of $C_{1,n}$, $C_{3,7}$, $C_{2,7}$, $C_{2,6}$, $C_{2,5}$, $\overline{2K_3}$, $\overline{K_2 + K_3}$, $\overline{K_1 + K_{2,3}}$, $\overline{C_4 + K_1}$ and their spanning subgraphs are obtained.
Key words: pancyclic, Hamilton graph, embedding, packing

设 G 是一个简单无向图,$V(G)$,$E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集,$\overline{G}$ 表示 G 的补图.若 $|V(G)| = p$ 且 $|E(G)| = q$,则称 G 是(p,q)图.若图对 G_1,G_2 具有相同的顶点数,则称 G_1,G_2 是同阶图.我们以 O_n 表示 n 个孤立顶点,C_n 表示长为 n 的圈,K_m 表示 m 阶完全图,$G_1 \vee G_2$ 表示图 G_1 和图 G_2 的联图,$G_1 + G_2$ 或 $G_1 \cup G_2$ 表示图 G_1 和图 G_2 的并,$C_{m,n}$ 表示 $K_m \vee (\overline{K}_m + K_{n-2m})$,其中 $1 \leqslant m \leqslant n/2$,$S_n$ 表示 n 阶星图,B_n'' 表示在 S_n 中增加两条边得到的 n 阶($p,p+1$)图.当图 H 是图 G 的子图时,记为 $H \subseteq G$.

设 G_1,G_2 是同阶图,σ_1 是 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 的双射,σ_2 是 $V(G_2)$ 上的置换,则 $\sigma_2\sigma_1$ 表示 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 的双射,若对 $V(G_2)$ 的非空子集 $S = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$,有 $\sigma_2(x_j) \in S(j = 1,2,\cdots,k)$,$\sigma_2(y) = y(\forall\, y \in V(G_2) - S)$,则简记 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \sigma_2(x_1) & \sigma_2(x_2) & \cdots & \sigma_2(x_k) \end{pmatrix}$,特别当 $\sigma_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{k-1} & x_k \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_1 \end{pmatrix}$ 记 $\sigma_2 = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k)$.

本文讨论的图均为简单无向图,其它未说明的术语和符号参见文献[1].

泛圈图是图论中研究的重要课题之一,20 世纪 60 年代以来,Bondy[1]等图论专家对泛圈图的研究作出了重要贡献.泛圈图要求的条件要比 Hamilton 图的条件强得多,Ore 和 Bondy 在文献[2,3]中得到如下关于 Hamilton 图的结果:

若 G 是 n 阶(p,q)图,$n \geqslant 3$,$q > C_{p-1}^2 + 1$,则 G 是 Hamilton 图,$q = C_{p-1}^2 + 1$ 的非 Hamilton 图只有 $C_{1,n}$ 和当 $n = 5$ 时的 $C_{2,5}$.

本文应用图的包装理论研究 n 阶(p,q)图当 $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$ 时是泛圈图的充要条件.

定义 1 设 G_1,G_2 是同阶图,若 G_1 与 $\overline{G_2}$ 的某个子

收稿日期:2006-12-18
修回日期:2007-03-20
作者简介:唐干武(1962-),男,副教授,主要从事图论及概率统计研究。

图同构，则称 G_1 可嵌入$\overline{G_2}$，记作 $G_1 \prec \overline{G_2}$. 当其同构映射为 τ 时，记作 $G_1 \overset{\tau}{\prec} \overline{G_2}$. G_1 可嵌入$\overline{G_2}$，也称$\{G_1, G_2\}$是可包装的.

定义 2 如果 n 阶图 G 有长为 n 的圈 C_n，则称图 G 是 Hamilton 图，如果 n 阶图 G 有长为 3 至 n 的每个长度的圈，则称图 G 是泛圈图.

定理 1 设 G 是 $n(n \geqslant 5)$ 阶(p,q)图，当 $q \geqslant C_{p-1}^2 - 2$ 时，则 G 为泛圈图的充要条件是：

(1) G 不为 $C_{2,8}, C_{3,8}, C_{4,9}, K_2 \vee (\overline{K_1} + \overline{K_{2,2}})$，$\overline{K_1 + K_{2,4}}$；

(2) G 不为 $C_{1,n}, C_{3,7}, C_{2,7}, C_{2,6}, C_{2,5}$，$\overline{2K_3}$，$\overline{K_2 + K_3}$，$\overline{K_1 + K_{2,3}}$ 和$\overline{C_4 + K_1}$ 及其支撑子图.

用包装的概念，定理 1 可用下述定理 2 等价叙述.

定理 2 设 G 是 $n(n \geqslant 5)$ 阶$(p, p+1)$图，则图对$\{C_{n-m} \cup O_m, G\}$(其中 $0 \leqslant m \leqslant n-3$，当 $m=0$ 时，表示无孤立顶点)是可包装的充要条件是 G 满足：

(1) G 不为$\overline{C_{2,8}}, \overline{C_{3,8}}, \overline{C_{4,9}}, \overline{K_2} + (K_1 \vee K_{2,2}), K_1 + K_{2,4}$；

(2) G 不以$\overline{C_{1,n}}, \overline{C_{3,7}}, \overline{C_{2,7}}, \overline{C_{2,6}}, \overline{C_{2,5}}, 2K_3, K_2 + K_3, K_1 + K_{2,3}$ 和 $C_4 + K_1$ 为支撑子图.

定理 1 和定理 2 的证明需下面两个引理.

引理 1[4] 设 G_1 是 n 阶(p, q_1)图，G_2 是 n 阶(p, q_2)图，若 G_1, G_2 都不为星，$q_1 + q_2 \leqslant 2n - 4$，则 $G_1 \prec \overline{G_2}$.

引理 2[7] 设$\{G_1, G_2\}$是同阶图对，H_1, H_2 分别是 G_1, G_2 的支撑子图，若 $G_1 \prec \overline{G_2}$ 则 $H_1 \prec \overline{H_2}$.

定理 1 和定理 2 是等价的，只需证明其中之一即可，下面证明定理 2.

证明 定理的必要性是显然的，下面证明其充分性.

设 $|V(G)| = k$，对 k 进行归纳，$k = 5 \sim 10$ 时，易平凡验证定理成立.

设 $k < n(k \geqslant 5, n \geqslant 11)$ 时定理成立，现考虑 $k = n$ 的情形.

由于 G 是$(p, p+1)$图，$C_{n-5} \cup O_5$ 是$(p, p-5)$图，根据引理 1 知 G 和 $C_{n-5} \cup O_5$ 是可包装的，再根据引理 2，对 $5 < m \leqslant n-3$，G 和 $C_{n-m} \cup O_m$ 是可包装的，于是定理的证明只需考查 $m = 0,1,2,3$ 和 4 时的情形即可.

因为 $\delta(G) \leqslant 2$，下面据此分 $\delta(G) = 0$，$\delta(G) = 1$ 和 $\delta(G) = 2$ 三种情形讨论.

情形 1 $\delta(G) = 0$.

若 G 有两个或两个以上的孤立顶点，设 u_0, u_1 是 G 的两个孤立顶点，u_m 是 G 中的最高度顶点，因 G 是$(p, p+1)$图，所以 $d(u_m) \geqslant 3$，则 $G - \{u_0, u_1, u_m\}$ 是(p,q)图$(q \leqslant p+1)$，于是存在$(p, p+1)$图 H：$G - \{u_0, u_1, u_m\}$ 是 H 的支撑子图，且 H 不以$\overline{C_{1,n-3}}$ 为支撑子图，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-3-m} \cup O_m \overset{\tau}{\prec} \overline{G - \{u_0, u_1, u_m\}}$，又设 $v_1v_2v_3$ 是 $C_{n-m} \cup O_m$ 中的一条路，由于 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq C_{n-3-m} \cup O_m$，所以也有 $C_{n-3-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \overset{\tau}{\prec} \overline{G - \{u_0, u_1, u_m\}}$，令 σ：

$v_1 \to u_0, v_2 \to u_m, v_3 \to u_1, w \to \tau(w), \forall\, w \in V(C_{n-m} \cup O_m) - \{v_1, v_2, v_3\}$，则 $C_{n-3-m} \cup O_m \overset{\sigma}{\prec} \overline{G}$.

于是下面仅考虑 G 只有一个孤立顶点的情形，设 u_0 是 G 的惟一的孤立顶点.

(1) 若 G 中有 1 度顶点 u_1，因 G 不以$\overline{C_{1,n}}$ 为支撑子图，所以 G 中存在与 u_1 不相邻接的顶点 u_2，满足 $d(u_2) \geqslant 2$，于是存在$(p, p+1)$图 H：$G - \{u_0, u_1, u_2\}$ 是 H 的支撑子图，且 H 不以$\overline{C_{1,n-3}}$ 为支撑子图，设 $v_1v_2v_3$ 是 $C_{n-m} \cup O_m$ 的一条路，因 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq C_{n-3-m} \cup O_m$ 由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \overset{\tau}{\prec} \overline{G - \{u_0, u_1, u_2\}}$，令 σ：$v_1 \to u_0, v_2 \to u_2, v_3 \to u_1, w \to \tau(w), \forall\, w \in V(C_{n-m} \cup O_m) - \{v_1, v_2, v_3\}$，则 σ 或$(u_0u_1)\sigma$ 使 $C_{n-m} \cup O_m \prec \overline{G}$.

(2) 若 G 中无 1 度顶点，则因 $G - u_0$ 是$(p, p+2)$图及 $n \geqslant 11$，所以 G 为 $2B_5'' \cup O_1$ 或 G 中存在两个相连的 2 度顶点 u_1 和 u_2，且 u_1 和 u_2 或满足(a)：u_1, u_2 没有共同的连接顶点，或满足(b)：u_1, u_2 有共同的连接顶点 u 且 $d(u) \leqslant 3$.

当 G 为 $2B_5'' \cup O_1$ 时，容易验证定理成立. 对情况(a)，设 $v_1v_2v_3$ 是 $C_{n-m} \cup O_m$ 中的一条路，由归纳假设及引理 2 及 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq C_{n-3-m} \cup O_m$，有 τ 使 $C_{n-3-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \overset{\tau}{\prec} \overline{G - \{u_0, u_1, u_2\}}$，令 σ：$v_1 \to u_1, v_2 \to u_0, v_3 \to u_2, w \to \tau(w), \forall\, w \in V(C_{n-m} \cup O_m) - \{v_1, v_2, v_3\}$，则 σ 或$(u_1u_2)\sigma$ 使 $C_{n-m} \cup O_m \prec \overline{G}$. 对情况(b)，若 $d(u) = 2$，此时即 G 含 K_3 为其连通分支，以 u_1, u_2, u_3 记为 K_3 的 3 个顶点，因 $n - m > 6$，所以 C_{n-m} 中存在顶点 v_1, v_2, v_3，满足 $d(v_i, v_j) \geqslant 2(i, j = 1,2,3, i \neq j)$，由归纳假设及引理 2 知 $C_{n-3-m} \cup O_m \prec \overline{G - \{u_1, u_2, u_3\}}$，因 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq C_{n-3-m} \cup O_m$，由引理 2 有 τ 使 $C_{n-m} \cup O_m - \{v_1, v_2, v_3\} \overset{\tau}{\prec} \overline{G - \{u_1, u_2, u_3\}}$，令 σ：$v_1 \to u_1, v_2 \to u_2, v_3 \to u_3, w \to \tau(w), \forall\, w \in V(C_{n-m} \cup O_m) - \{v_1, v_2, v_3\}$，则 $C_{n-m} \cup O_m \overset{\sigma}{\prec} \overline{G}$. 若 $d(u) = 3$，设 u 的另一连接顶点为

$u_3, v_1v_2v_3v_4v_5$ 是 $C_{n-m}\cup O_m$ 的一条路，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3,v_5\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u_1,u_2,u_3,u\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u_3, v_3\to u_2, v_5\to u, w\to\tau(w)$，
$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$，则 $C_{n-m}\cup O_m\stackrel{\sigma}{<}\overline{G}$.

情形 2 $\delta(G)=1$.

(1) 若 G 只有一个 1 度顶点 u，则 $G-u$ 是 $(p,p+1)$ 图，从而 $G-u$ 至多有两个顶点的度大于 2，其余顶点的度均为 2，此时由 $n\geqslant 11$ 知：G 或满足情况(a)G 中含 K_3 为其连通分支，或满足情况(b)G 中存在 2 个相连的 2 度顶点 u_1 和 u_2，且 u_1,u_2 没有共同的连接顶点和 $d(u,u_j)\geqslant 2(j=1,2)$.

在情况(a)下，可同于情形 1 的(2)中(b)的类似情况证明定理成立.

在情况(b)下，设 $v_1v_2v_3$ 是 $C_{n-m}\cup O_m$ 中的一条路，由归纳假设及引理 2 及 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq C_{n-3-m}\cup O_m$，有 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u,u_1,u_2\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u, v_3\to u_2, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3\}$，则 σ 或 $(u_1u_2)\sigma$ 使 $C_{n-m}\cup O_m<\overline{G}$.

(2) 若 G 至少有两个 1 度顶点，设 u_1,u_2 是 G 的两个距离最大的 1 度顶点，$v_1v_2v_3v_4v_5$ 是 $C_{n-m}\cup O_m$ 的一条路，(a) 若 $d(u_1,u_2)=1$，设 u_m 是 G 中的最高度顶点，有 $d(u_m)\geqslant 3$，于是存在 $(p,p+1)$ 图 $H: G-\{u_m,u_1,u_2\}$ 是 H 的支撑子图，且 H 不以 $\overline{C_{1,n-3}}$ 为支撑子图，因 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq C_{n-3-m}\cup O_m$，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u_1,u_2,u_m\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_3\to u_2, v_2\to u_m, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3\}$，则 $C_{n-m}\cup O_m\stackrel{\sigma}{<}\overline{G}$. (b) 若 $d(u_1,u_2)=2$，设 $u\in V(G), uu_j\in E(G)(j=1,2)$，若 $d(u)=2$，设 u_m 是 G 中的最高度顶点，有 $d(u_m)\geqslant 3$，于是存在 $(p,p+1)$ 图 $H: G-\{u_1,u,u_m\}$ 是 H 的支撑子图，且 H 不以 $\overline{C_{1,3}}$ 为支撑子图，因 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq C_{n-3-m}\cup O_m$，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u_1,u,u_m\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u_m, v_3\to u, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3\}$，则 σ 或 $(u_1u)\sigma$ 使 $C_{n-m}\cup O_m<\overline{G}$. 若 $d(u)>2$，因 G 不以 $\overline{C_{1,n}}$ 为支撑子图，所以 G 中存在与 u 不相邻接的顶点 u_3 和 u_4，于是存在 $(p,p+1)$ 图 $H: G-\{u_1,u_2,u,u_3,u_4\}$ 是 H 的支撑子图，且 H 不以 $\overline{C_{1,n-5}}$ 为支撑子图，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u_1,u_2,u,u_3,u_4\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u_3, v_3\to u, v_4\to u_4, v_5\to u_2, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，则 $C_{n-m}\cup O_m\stackrel{\sigma}{<}\overline{G}$. (c) 若 $d(u_1,u_2)>2$，由归纳假设及引理 2 有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u_1,u_2\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u_2, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2\}$，则 σ 或 $(u_1u_2)\sigma$ 使 $C_{n-m}\cup O_m<\overline{G}$.

情形 3 $\delta(G)=2$.

因 G 是 $(p,p+1)$ 图，此时 G 至多有两个顶点的度大于 2，其余顶点的度均为 2，由 $n\geqslant 11$ 知：或(a)G 含 K_3 为其连通分支，或(b)G 中存在两个相连的 2 度顶点 u_1 和 u_2，且 u_1,u_2 没有共同的连接顶点.

在情况(a)下，可同于情形 1 的(2)中(b)的类似情况证明定理成立.

在情况(b)下，设 $v_1v_2v_3$ 是 $C_{n-m}\cup O_m$ 中的一条路，取 G 中的顶点 u，满足 $d(u,u_j)\geqslant 2(j=1,2)$，由归纳假设及引理 2 及 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq C_{n-3-m}\cup O_m$，有 τ 使 $C_{n-m}\cup O_m-\{v_1,v_2,v_3\}\stackrel{\tau}{<}\overline{G-\{u,u_1,u_2\}}$，令 $\sigma: v_1\to u_1, v_2\to u, v_3\to u_2, w\to\tau(w)$，$\forall\, w\in V(C_{n-m}\cup O_m)-\{v_1,v_2,v_3\}$，则 σ 或 $(u_1u_2)\sigma$ 使 $C_{n-m}\cup O_m<\overline{G}$.

综上所述，定理 2 得证.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan Press, 1976.

[2] Ore O. Are coverings of graphs[J]. Ann Mat Pura Appl, 1962, 55(3): 126-129.

[3] BONDY J A. Variation on the hamilton theme canad[J]. Math Bull, 1972, 15(2): 57-62.

[4] YAP H P. Some topics in graph theory[M]. Cambridge: The Press Syndicate of the University of Cambridge, 1986.

[5] WANG MIN, LI GUOJUN. Packing a tree of order p with a $(p,p+1)$-graph[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2003, 16(1): 122-132.

[6] 唐干武，王敏. 包装 $(p,p-2)$ 图和不含 K_3 的 $(p,p+1)$ 图[J]. 江西师范大学学报，2005，29(3)：220-223.

[7] 王敏，方新贵. 包装不含 K_3 的 (p,p) 图对[J]. 高校应用数学学报，1991，6(1)：66-70.

[8] WANG MIN, LI GUOJUN. A result of erdős-Sós conjecture[J]. Ars Combinatoria, 2000, 55(2): 123-127.

[9] 唐干武，王敏. 边 $q\geqslant C_{p-1}^2+1$ 的 (p,q) 图的泛圈性[J]. 桂林师范高等专科学校学报，2006，20(1)：120-122.

（责任编辑：邓大玉）